Aufgabe 1 (10 min):

Barneys Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2.$$

Dabei steht x_1 für die von ihm konsumierte Menge Bier und x_2 für die von ihm konsumierte Menge Wein. Der Preis einer Flasche Bier beträgt dabei 1 Geldeinheit und der einer Flasche Wein 2 Geld- einheiten. Insgesamt besitzt er ein Budget von 6 Geldeinheiten.

1. Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution! Wie ändert sich diese mit steigendem x_1? Skizzieren Sie eine Indifferenzkurve!

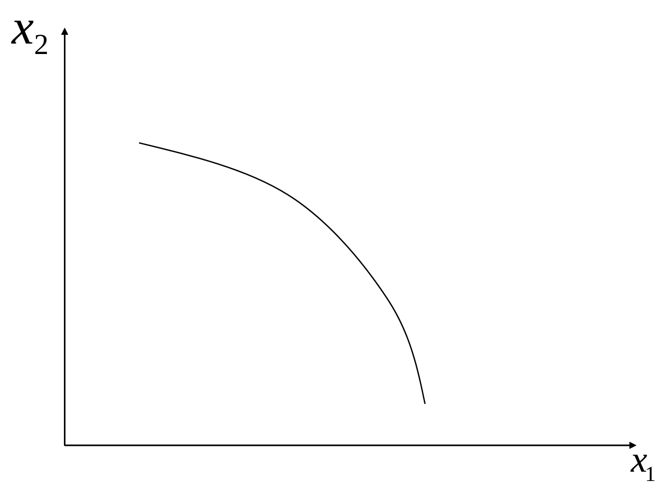
2. Welche Mengen Bier und Wein konsumiert Barney im Optimum?

Lösungsvorschlag:

1. Die Grenzrate der Substitution bestimmt sich wie folgt:

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_1}{2x_2}$$

Entlang einer Indifferenzkurve muss x_2 mit steigendem x_1 sinken (siehe Nutzenfunktion). Mit zunehmendem x_1 und sinkendem x_2 steigt die Grenzrate der Substitution, d.h. die Präferenzen sind konkav.



2. Auf Grund des konkaven Verlaufs der Indifferenzkurven erhalten wir ein Rand-Haushaltsoptimum.

Wegen

$$u\,(6,0) = 18 > 9 = u(0,3)$$

ist es optimal, 6 Einheiten (Flaschen) Bier zu konsumieren.

Aufgabe 2 (15 min):

Ein Unternehmen produziere für zwei Märkte A und B mit Nachfragefunktionen $D^A(p) = 12 - 2p$ und $D^B(p) = 20 - 5p$. Berechnen Sie die aggregierte Nachfrage und den Preis, der den Umsatz maximiert!

Lösungsvorschlag:

Zwischen den Prohibitivpreisen $p^B = 4$ und $p^A = 6$ herrscht nur eine Nachfrage auf dem Markt A. Für Preise unter dem Prohibitivpreis von Markt B sind beide Nachfragen aktiv und die aggregierte Nachfrage ergibt sich als horizontale Aggregation. Insgesamt lautet die Nachfrage:

$$D^{ges}(p) = \begin{cases} 0 & p > 6 \\ 12 - 2p & 4 \leq p \leq 6 \\ 32 - 7p & 0 \leq p < 4 \end{cases} .$$

Der umsatzmaximierende Preis für $4 \leq p \leq 6$:

$$\begin{aligned} R(p) &= D(p)p = 12p - 2p^2 \\ \frac{d}{dp}R(p) &= 12 - 4p \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Der umsatzmaximierende Preis $p^* = 3$ liegt hier nicht im zulässigen Bereich, sodass $p = 4$ als Randwert zum optimalen Erlös von $R(4) = 16$ führt.

Der umsatzmaximierende Preis für $0 \leq p < 4$:

$$\begin{aligned} R(p) &= D(p)p = 32p - 7p^2 \\ \frac{d}{dp}R(p) &= 32 - 14p \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Der umsatzmaximierende Preis $p^* = \frac{16}{7}$ befindet sich im zulässigen Intervall und liefert einen maximalen Erlös von $\frac{256}{7} > 16$.

Aufgabe 3 (7 min):

Erläutern Sie anhand der Slutsky-Gleichung bei Geldeinkommen, unter welchen Bedingungen ein Gut gewöhnlich ist!

Lösungsvorschlag:

Die Slutsky-Gleichung zerlegt analytisch den Effekt einer Preisvariation auf die Nachfrage nach einem Gut in den Einkommens- und den Substitutionseffekt. Sie lautet:

$$\underbrace{\frac{\partial x_1^G}{\partial p_1}}_{\text{Gesamteffekt}} = \underbrace{\frac{\partial x_1^S}{\partial p_1}}_{\text{Substitutionseffekt}} \underbrace{-\frac{\partial x_1^G}{\partial m} x_1^B}_{\text{Einkommenseffekt}}$$

Der Substitutionseffekt ist immer negativ. Der Einkommenseffekt wirkt bei normalen Gütern in die selbe Richtung wie der Substitutionseffekt; bei inferioren Gütern wirkt er in die entgegengesetzte Richtung.

Gewöhnliche Güter sind jene Güter, bei denen der Gesamteffekt negativ ist. Eine Preiserhöhung hat also ein Sinken der Nachfrage nach dem Gut zur Folge. Es gibt somit zwei Fälle zu unterscheiden. Zum einen ist ein normales Gut stets ein gewöhnliches Gut, da hier Einkommens- und Substitutionseffekt in die gleiche Richtung wirken. Zum anderen sind inferiore Güter dann gewöhnliche Güter, wenn der Einkommenseffekt betragsmäßig kleiner ist als der Substitutionseffekt.

Aufgabe 4 (10 min)

Ein Individuum muss sich zwischen den folgenden zwei Lotterien entscheiden:

$$L_1 = \left[10, 0; \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right], L_2 = \left[10, 5; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right].$$

1. Für welche der beiden Lotterien wird sich das Individuum entscheiden, wenn seine vNM-Nutzenfunktion (vNM für von Neumann und Morgenstern) durch $u(x) = x^2$ gegeben ist?

2. Bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent und die Risikoprämie der zweiten Lotterie!

Lösungsvorschlag:

1. Für die Entscheidung des Individuums sind die erwarteten Nutzen der Lotterien die Entscheidungsgrundlage. Diese lauten:

$$\begin{aligned} E_u(L_1) &= \frac{3}{5}u(10) + \frac{2}{5}u(0) \\ &= \frac{3}{5}100 \\ &= 60 \\ E_u(L_2) &= \frac{2}{5}u(10) + \frac{3}{5}u(5) \\ &= \frac{2}{5}100 + \frac{3}{5}25 \\ &= 55. \end{aligned}$$

   Aufgrund des höheren erwarteten Nutzens der Lotterie L_1 wird das Individuum diese Lotterie vorziehen.

2. Für das Sicherheitsäquivalent muss gelten:

$$\begin{aligned} u(CE) &= E_u(L_2) \\ CE^2 &= 55 \\ CE &= \sqrt{55}. \end{aligned}$$

   Für die Risikoprämie gilt:

$$\begin{aligned} RP(L_2) &= E(L_2) - CE(L_2) \\ &= 7 - \sqrt{55} < 7 - \sqrt{49} = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 min)

Hartmuts Präferenzen sind durch die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ repräsentiert. Er besitzt die Anfangsausstattung $\omega_1 = 2, \omega_2 = 0$. Der Preis des zweiten Gutes beträgt $p_2 = 1$. Bestimmen Sie für beide Güter die Nachfragefunktion!

1. Geben Sie die Haushaltsoptima für $p_1 = 0$, $p_1 = 1$ und $p_1 = 2$ an!

2. Zeichnen Sie die Preis-Konsum-Kurve für Gut 1.

   Lösungsvorschlag:

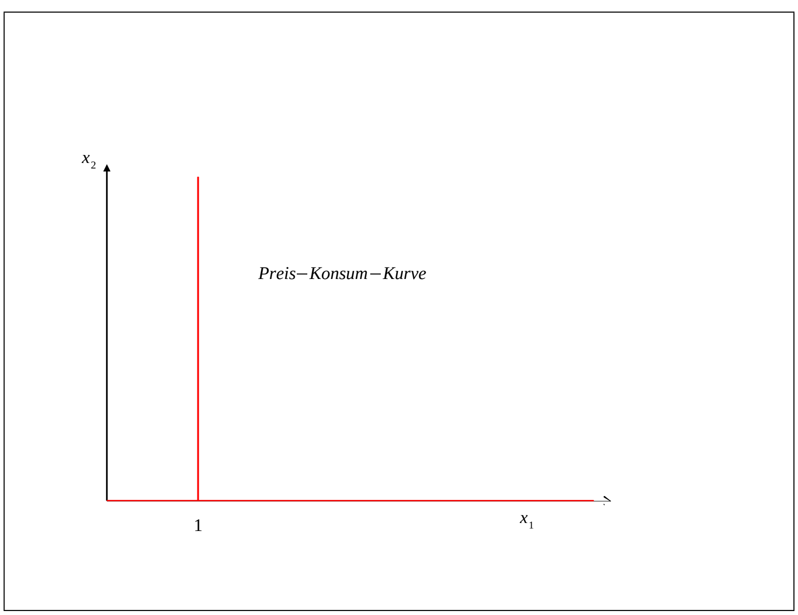
1. $$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_2}{x_1} \stackrel{!}{=} \frac{p_1}{p_2} = p_1$$

   Eingesetzt in die Budgetbedingung gilt für $p_1 > 0$:

   $$\begin{aligned} x_2 + p_1 x_1 &= p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 2p_1 \\ 2p_1 x_1 &= 2p_1 \\ x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= p_1 \end{aligned}$$

   Für $p_1 = 1$ lautet ist $(1, 1)$ und für $p_1 = 2$ ist $(1, 2)$ das optimale Güterbündel. Für $p_1 = 0$ kann Hartmut nur Gut 1 konsumieren, das ein freies Gut darstellt. Aufgrund der oben genannten Nutzenfunktion ist jedes Güterbündel $(x_1^*, 0)$, mit $x_1^* \geq 0$, optimal, denn diese Güterbündel ergeben alle ein maximales Nutzenniveau von null.

2. Die Preiskonsumkurve stellt alle Haushaltsoptima in einem $x_1 - x_2$ Diagramm dar. Hier ist sie eine vertikale Gerade $x_1 = 1$ (für $p_1 > 0$), sowie die komplette x_1-Achse $(x_2 = 0)$ für (für $p_1 = 0$).



Aufgabe 6 (15 min)

Karl Steuerstöhn maximiert seinen Nutzen auf Grundlage seiner Nutzenfunktion $U(F,C) = F^{\alpha}C^{1-\alpha}$, wobei F seine Freizeit und C seinen Konsum darstellt. Karls Stundenlohn beträgt w. Nach einer Steuerreform muss Karl eine prozentuale Lohnsteuer in Höhe von t ($0\% < t < 100\%$) an den Fiskus abführen. Der Preis für den Konsum C betrage $p_C = 1$.

1. Wie viel Freizeit genießt Karl vor und nach der Einführung dieser Lohnsteuer?

2. Wie ändert sich Karls Konsum?

3. Wie hoch ist das Steueraufkommen?

Lösungsvorschlag:

1. Vor der Einführung der Lohnsteuer:

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\alpha F^{\alpha-1}C^{\alpha}}{(1-\alpha)\,F^{\alpha}C^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{C}{F} \stackrel{!}{=} \frac{w}{p_C} = w.$$

Eingesetzt in die Budgetbedingung

$$wF + C = 24w$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{1-\alpha}C + C &= 24w \\
\frac{C}{1-\alpha} &= 24w \\
C^* &= 24\,(1-\alpha)\,w \\
F^* &= 24\alpha
\end{aligned}$$

Nach der Einführung der Lohnsteuer:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{C}{F} \stackrel{!}{=} \frac{w(1-t)}{p_C} &= w(1-t) \\
w(1-t)F + C &= 24w(1-t) \\
C^* &= 24\,(1-\alpha)\,(1-t)w \\
F^* &= 24\alpha
\end{aligned}$$

Karl genießt vor und nach der Lohnsteuer Freizeit in Höhe von 24α.

2. Karl reduziert seinen Konsum von $24\,(1-\alpha)\,w$ auf $24\,(1-\alpha)\,(1-t)w$.

3. Es gilt:

$$\begin{aligned}
T &= t\underbrace{(24 - F^*)}_{Arbeitszeit}w \\
&= t(24 - 24\alpha)w \\
&= 24t(1-\alpha)w.
\end{aligned}$$