Aufgabe 1 (6 Punkte)
Ein Produkt wird sowohl von einem bekannten als auch von einem unbekannten Hersteller angeboten. Hannes Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$U(x_1, x_2) = 3x_1 + 6x_2,$$

wobei x_1 die Menge des Produktes des unbekannten Herstellers und x_2 die Menge des Produktes des bekannten Herstellers bezeichnet. Das Produkt des bekannten Herstellers ist mehr als doppelt so teuer wie das Produkt des unbekannten Herstellers.

a) Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

b) Wie lautet das Haushaltsoptimum, wenn das Produkt des bekannten Herstellers exakt doppelt so teuer ist wie das Produkt des unbekannten Herstellers?

Lösungsvorschlag

a) Die Präferenzen sind monoton wachsend. Die Grenzrate der Substitution ist gegeben durch

$$\text{MRS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{1}{2}.$$

Demzufolge handelt es sich um eine lineare Indifferenzkurve. Da der Preis von Gut 2 mehr als doppelt so hoch ist wie der Preis von Gut 1 gilt:

$$\text{MRS} = \frac{1}{2} > \frac{p_1}{p_2} = \text{MOC}$$

Das Haushaltsoptimum ergibt sich somit als Randlösung $P = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$.

b) Es gilt $2p_1 = p_2$. Demnach ist die Optimalitätsbedingung MRS=MOC für alle Güterbündel (x_1, x_2) erfüllt. Optimal sind daher alle Güterbündel, die auf der Budgetgeraden liegen

$$P = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, m = p_1 x_1 + p_2 x_2\}.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Gegeben ist die Lotterie $L = \left[100, 0; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ und die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$. Sabine kann sich entscheiden, entweder die Lotterie zu spielen oder den Erwartungswert der Lotterie sicher zu erhalten.

a) Wird sich Sabine dafür entscheiden, die Lotterie zu spielen?

b) Welche Risikopräferenzen hat Sabine (risikoavers, -neutral, -freudig)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag

a) Damit Sabine die Lotterie spielt, muss ihr erwarteter Nutzen größer sein als der Nutzen des Erwartungswertes der Lotterie, das heißt

$$E_u(L) > u(E(L)).$$

Es gilt $E_u(L) = \frac{1}{4}\sqrt{100}$ und $E(L) = \frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 25$, also $u(E(L)) = u(25) = \sqrt{25}$ Man gelangt zu der Bedingung:

$$\frac{1}{4}\sqrt{100} > \sqrt{25}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \frac{10}{4} > 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 10 > 20 \end{aligned}$$

Diese Aussage ist falsch, Sabine wird sich folglich nicht entscheiden, die Lotterie zu spielen.

b) Die Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$ ist konkav, denn es gilt

$$\frac{d}{dx}u(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dx^2}u(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}^3} < 0.$$

Es lässt sich daher auf Risikoaversion schließen.

Alternative: Aus dem vorigen Aufgabenteil wissen wir bereits, dass $E_u(L) \leq u(E(L))$ gilt. Sabine zieht es vor, den Erwartungswert der Lotterie sicher zu bekommen, statt die Lotterie zu spielen. Sie ist daher risikoavers.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Beurteilen Sie, welche Aussagen richtig sind! Falsche Antworten werden mit richtigen Antworten verrechnet! Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit zutreffend und es ist keine Begründung notwendig!

Die Sättigungsmenge ist diejenige Menge, die bei einem Preis von 0 nachgefragt wird	wahr falsch	o o
Die Preiselastizität der Nachfrage wird in $\frac{\text{Mengeneinheiten}}{\text{Geldeinheiten}}$ gemessen	wahr falsch	o o
Ist die Preiselastizität der Nachfrage absolut kleiner als 1, so spricht man von einer unelastischen Nachfrage	wahr falsch	o o

Lösungsvorschlag

Die Sättigungsmenge ist diejenige Menge, die bei einem Preis von 0 nachgefragt wird	wahr falsch	X
Die Preiselastizität der Nachfrage wird in $\frac{\text{Mengeneinheiten}}{\text{Geldeinheiten}}$ gemessen	wahr falsch	 X
Ist die Preiselastizität der Nachfrage absolut kleiner als 1, so spricht man von einer unelastischen Nachfrage	wahr falsch	X

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Auf einem Faktormarkt gebe es zwei Nachfrager A und B. Ihre Nachfragefunktionen sind gegeben durch $x^A(w) = 35 - 5w$ beziehungsweise $x^B(w) = 40 - 4w$. Bestimmen Sie die aggregierte Faktornachfragefunktion!

Lösungsvorschlag
Die Prohibitivpreise betragen jeweils $w^A_{\text{prohib}} = 7$ und $w^B_{\text{prohib}} = 10$. Die aggregierte Nachfrage ergibt sich demnach wie folgt:

$$x(w) = \begin{cases} 0, & w > 10 \\ 40 - 4w, & 10 \geq w > 7 \\ 75 - 9w, & 7 \geq w \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = \min(3x_1, x_2)$. Begründen Sie, ob es sich um wachsende, konstante oder fallende Skalenerträge handelt.
Lösungsvorschlag

Für $t > 1$ gilt: $f(tx_1, tx_2) = \min(t3x_1, tx_2) = t\min(3x_1, x_2) = tf(x_1, x_2)$. Folglich handelt es sich um konstante Skalenerträge.

Aufgabe 6 (6 Punkte)
Lauras Nachfragefunktion für Gut 1 sei gegeben durch

$$x_1^* \left(m, p_1, p_2\right) = 5m - \frac{1}{p_1}.$$

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen und begründen Sie Ihre Antwort!

Gut 1 ist gewöhnlich	wahr falsch	o o
Gut 1 ist inferior	wahr falsch	o o

Lösungsvorschlag
Es sind die Effekte bezüglich des Preises und bezüglich des Einkommens zu beurteilen. Ersterer ist gegeben durch

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1^2} > 0.$$

Es handelt sich folglich um ein nicht-gewöhnliches Gut. Für den Effekt bezüglich des Einkommens gilt

$$\frac{\partial x_1}{\partial m} = 5 > 0,$$

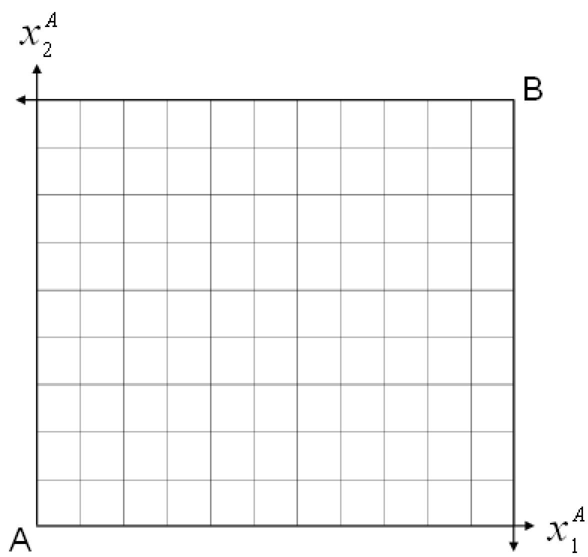
das Gut ist somit normal.

Aufgabe 7 (11 Punkte)
In einer Tauschökonomie hat Agent A die Nutzenfunktion $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A$ und Agent B hat die Nutzenfunktion $u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = x_1^B + x_2^B$. Die Anfangsausstattungen sind gegeben mit $\omega^A = (9,3)$ und $\omega^B = (2,6)$.

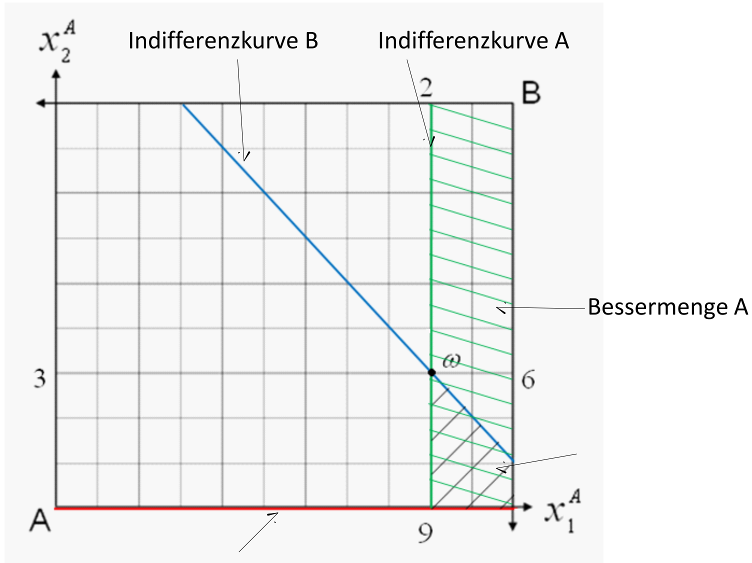
a) Zeichnen Sie die Tausch-Edgeworth-Box zu dieser Situation möglichst exakt in das beigefügte Raster ein! Ihre Zeichnung sollte zumindest folgende Objekte abbilden (Beschriften Sie die eingezeichneten Objekte hinlänglich!):

- die Anfangsausstattung der beiden Akteure,
  - die Indifferenzkurze für jeden Akteur, die jeweils durch ω verläuft,
  - die Bessermenge von Agent A ausgehend von ω (das ist die Menge aller Punkte $\left(x_1^A, x_2^A\right)$, für die $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) \geq u^A\left(\omega_1^A, \omega_2^A\right)$ gilt)
  - die Tauschlinse!

b) Bestimmen Sie die Kontraktkurve und zeichnen Sie sie zusätzlich in die Tausch-Edgeworth-Box ein.



Lösungsvorschlag:
Durch ω ist die Anfangsausstattung gekennzeichnet. Die Indifferenzkurve von Akteur A beziehungsweise B durch die Anfangsausstattung sind grün beziehungsweise blau eingezeichnet. Die Bessermenge von Agent Aliegt rechts seiner Indifferenzkurve und ist grün schraffiert. Es ergibt sich die Tauschlinse als Schnittmenge der Bessermengen der beinen Akteure (schwarz schraffiert).



Es bleibt die Kontraktkurve zu bestimmen:

- Eine Allokation, die Akteur A eine echt positive Menge von Gut 2 zuspricht, kann nicht pareto-optimal sein:

  A kann diese Mengeneinheiten B geben, ohne Nutzen zu verlieren, B würde dadurch einen höheren Nutzen erzielen

- Alle Allokationen, die Agent A nichts von Gut 2 zusprechen (und demzufolge Akteur B alles), sind pareto-optima:

  Eine Veränderung in der Verteilung von Gut 2 hat für Akteur A keine Wirkung und stellt Akteur B schlechter. Durch eine Verringerung von Gut 1 für Akteur A stellt sich A selbst schlechter. Durch eine Erhöhung von Gut 1 für Akteur A stellt sich A zwar besser, B allerdings schlechter, da nichts von Gut 2 hinzukommt.

Als Kontraktkurve (rot eingezeichnet) ergeben sich folglich die Allokationen, für die $x_2^A = 0$ gilt.

Aufgabe 8 (6 Punkte)
Auf einem Markt mit vollkommenen Wettbewerb sei für jedes Unternehmen die langfristige Kostenfunktion durch

$$C(y) = \begin{cases} 64 + y^2, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

gegeben.
Welcher Preis wird auf dem Markt vorzufinden sein?

Lösungsvorschlag:
Die Durchschnittskosten müssen langfristig mit den Grenzkosten übereinstimmen.

$$AC(y) = \frac{64}{y} + y \overset{!}{=} 2y = MC(y)\,.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{64}{y} = y \iff y = 8.$$

Der Preis auf einem Markt mit vollkommenen Wettbewerb ist gerade so hoch, dass Erlös und Kosten übereinstimmen. Der Preis p ist entsprechend gegeben durch

$$p \cdot 8 = 64 + 8^2 \iff p = 16.$$

Aufgabe 9 (12 Punkte)
Zwei Unternehmen (Unternehmen 1 und Unternehmen 2 genannt) agieren auf einem Markt mit Mengenwettbewerb. Unternehmen 2 kann die Ausbringungsmenge von Unternehmen 1 beobachten und muss erst dann die eigene Menge festlegen. Die inverse Nachfragefunktion ist durch $p(X) = 12 - 2X$ gegeben, wobei $X = x_1 + x_2$ gilt. Die Kosten von Unternehmen 1 betragen $C(x_1) = \frac{1}{4}x_1^2$, die von Unternehmen 2 betragen $C(x_2) = x_2^2$. Man nehme an, dass Unternehmen 1 nur die Ausbringungsmengen $x_1 = 0$, $x_1 = 4$ oder $x_1 = 6$ wählen kann, während Unternehmen 2 eine beliebige Menge aus $\mathbb{R}_+$ wählen kann.

a) Bestimmen Sie die Reaktionsfunktion (Beste-Antworten-Funktion) von Unternehmen 2!

b) Welche Ausbringungsmenge wird Unternehmen 1 festlegen, wenn es diese Antwort antizipiert?

Lösung

a) Die Gewinnfunktion von Unternehmen 2 beträgt:

$$\pi_2\left(x_1, x_2\right) = \left(12 - 2X\right) x_2 - x_2^2.$$

Die Bedingung erster Ordnung lautet dann:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 12 - 2X - 2x_2 - 2x_2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit ergibt sich die Reaktionsfunktion als:

$$x_2^R\left(x_1\right) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{3}x_1, & x_1 \leq 6 \\ 0, & x_1 > 6 \end{cases}.$$

und explizit:

$$x_2^R\left(x_1\right) = \begin{cases} 2, & x_1 = 0 \\ \frac{2}{3} & x_1 = 4 \\ 0, & x_1 = 6 \end{cases}.$$

b) Die Gewinnfunktion von Unternehmen 1 beträgt:

$$\pi_1\left(x_1, x_2\right) = \left(12 - 2X\right) x_1 - \frac{1}{4}x_1^2.$$

Wir haben daher die Gewinne bei den drei möglichen Ausbringungsmengen mit den entsprechenden besten Antworten zu vergleichen:

$$\begin{aligned}
\pi_1\left(0, x_2^R(0)\right) &= 0 \\
\pi_1\left(4, x_2^R(4)\right) &= \left(12 - 2\left(4 + \frac{2}{3}\right)\right) 4 - 4 = \frac{20}{3} \\
\pi_1\left(6, x_2^R(6)\right) &= (12 - 12) \cdot 6 - \frac{36}{4} < 0
\end{aligned}$$

Damit wählt Unternehmen 1 die Menge $x_1 = 4$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)
Zwei Fischerunternehmen benutzen die gleichen Gewässer. Das erste Unternehmen besitze die Gewinnfunktion $\Pi_1(F_1, F_2) = 20F_1 - F_1^2 - F_1F_2 - F_2^2$, das zweite Unternehmen besitze die Gewinnfunktion $\Pi_2(F_1, F_2) = 20F_2 - F_2^2 - F_1F_2 - 4F_1$, wobei jeweils F_1 und F_2 die von den Unternehmen gefangene Fischmenge ist.

a) Welche Art von externen Effekten tritt hier auf?

b) Welche Mengen an Fischen werden im sozialen Optimum gewählt?

Lösung:

a) Um die Art des externen Effektes bestimmen zu können, müssen die Gewinne der Unternehmen nach der gefangenen Menge des anderen Unternehmens abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial F_2}(F_1, F_2) &= -F_1 - 2F_2 < 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial F_1}(F_1, F_2) &= -F_2 - 4 < 0 \end{aligned}$$

Damit tritt hier ein wechselseitiger und negativer externer Effekt auf!

b) Im sozialen Optimum wird der aggregierte Gewinn der Unternehmen betrachtet:

$$\Pi_1(F_1, F_2) + \Pi_2(F_1, F_2) = 16F_1 + 20F_2 - F_1^2 - 2F_2^2 - 2F_1F_2 \to \max!$$

Es werden die Bedingungen erster Ordnung benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{gesamt}}{\partial F_1} &= 16 - 2F_1 - 2F_2 \overset{!}{=} 0, \\ \frac{\partial \Pi_{gesamt}}{\partial F_2} &= 20 - 4F_2 - 2F_1 \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher ein Gleichungssystem, welches durch Einsetzen gelöst werden kann. Aus der ersten Bedingung ergibt sich, dass $F_1(F_2) = 8 - F_2$. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir daher:

$$\begin{aligned} 20 - 4F_2 - 2(8 - F_2) &= 0 \iff \\ 4 &= 2F_2 \\ F_2 &= 2. \end{aligned}$$

Im sozialen Optimum werden daher die Menge $F_1 = 6$ und $F_2 = 2$ realisiert.

Aufgabe 11 (10 Punkte)
Auf einem Markt mit homogenen Gütern herrsche Preiswettbewerb. Zwei Unternehmen konkurrieren auf diesem Markt und entscheiden gleichzeitig über ihre gewählten Preise p_1 beziehungsweise p_2. Die Nachfragefunktion von Unternehmen 1 ist durch

$$X_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 12 - 2p_1 & p_1 < p_2 \\ \frac{12-2p_1}{2} & p_1 = p_2 \\ 0 & p_1 > p_2 \end{cases},$$

die Nachfragefunktion von Unternehmen 2 ist durch

$$X_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & p_1 < p_2 \\ \frac{12-2p_2}{2} & p_1 = p_2 \\ 12 - 2p_2 & p_1 > p_2 \end{cases}$$

gegeben. Die konstanten Grenz- und Durchschnittskosten der Unternehmen betragen 2.

Erläutern Sie, warum die Preiskombination, in der beide Unternehmen den Preis 2 wählen, ein Nash-Gleichgewicht ist!

Lösung:

Falls beide Unternehmen die Preise $p_1 = 2$ wählen, so beträgt deren Gewinn

$$\Pi_1 = \Pi_2 = 0.$$

Weicht nun eines der Unternehmen einseitig ab, so ist der neue Preis des Unternehmens höher oder niedriger als 2, während der Preis des anderen Unternehmens bei 2 verbleibt.

(i) Falls der neue Preis kleiner ist als 2, so zieht zwar das Unternehmen die gesamte Nachfrage auf sich , aber der Gewinn wird negativ.

(ii) Falls das Unternehmen einen Preis wählt, der höher als 2 ist, dann ist dessen neue Nachfrage 0 . Damit vergrößert sich auch der Gewinn des Unternehmens nicht.

Daher gibt es für keines der Unternehmen eine profitable einseitige Abweichung . Die Situation, in der beide Unternehmen den Preis 2 wählen, ist damit ein Nash-Gleichgewicht.