Universität Leipzig

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

# BACHELOR – PRÜFUNG

| | |
|---|---|
| **DATUM:** | **28. Februar 2014** |
| **Modul:** | **Mikroökonomik** |
| **PRÜFER:** | **Prof. Dr. Harald Wiese** |

**PRÜFUNGS-NR.:**

STUDIENGANG:

NAME, VORNAME:

UNTERSCHRIFT DES STUDENTEN:

**ERLÄUTERUNGEN:**

**Maximal erreichbare Punkte: 80**
**Bearbeitungszeit: 90 Minuten**
**Lesen Sie die Aufgabenstellung vor dem Bearbeiten gründlich!**
**Schreiben Sie, bitte, leserlich!**
**Begründen Sie Ihre Antworten!**
**Machen Sie jeweils Ihren Rechenweg deutlich!**
**Sollte der Platz unter den Fragen nicht ausreichen,**
**verwenden Sie bitte jeweils die Rückseite!**
**Hilfsmittel: keine**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **PUNKTE:** | | | | | | | | | | | |

**NOTE:** **Unterschrift des Prüfers:**

**Aufgabe 1 (12 Punkte)**
Auf einem Markt agieren zwei Unternehmen im simultanen Mengenwettbewerb. Die inverse Nachfragefunktion sei durch $p(X) = 24 - 2X$ gegeben, wobei $X = x_1 + x_2$ die aggregierte Ausbringungsmenge der Unternehmen ist. Das erste Unternehmen maximiert seinen Gewinn und besitzt konstante Durchschnitts- und Grenzkosten von 6. Das zweite Unternehmen maximiert seinen Gewinn zuzüglich der Hälfte des Erlöses des ersten Unternehmens. Die konstanten Durchschnitts- und Grenzkosten des zweiten Unternehmens betragen 8.

a) Bestimmen Sie die Reaktionsfunktion des zweiten Unternehmens!

b) Bestimmen Sie das Cournot-Nash-Gleichgewicht auf diesem Markt!

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Gewinnfunktion des zweiten Unternehmens beträgt:

$$\Pi_2(x_1, x_2) = (24 - 2x_1 - 2x_2)\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right) - 8x_2.$$

Maximieren dieser Funktion führt zur Bedingung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} &= -2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right) + (24 - 2x_1 - 2x_2) - 8 \overset{!}{=} 0 \iff \\ & 4x_2 \overset{!}{=} 16 - 3x_1. \end{aligned}$$

Die Reaktionsfunktion des zweiten Unternehmens beträgt daher $x_2^R(x_1) = 4 - \frac{3}{4}x_1$.

b) Für das Cournot-Nash-Gleichgewicht wird noch die Reaktionsfunktion des ersten Unternehmens benötigt:

$$\Pi_1(x_1, x_2) = (24 - 2x_1 - 2x_2)x_1 - 6x_1.$$

Die Bedingung erster Ordnung führt zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} &= 24 - 4x_1 - 2x_2 - 6 \overset{!}{=} 0 \iff \\ & 4x_1 \overset{!}{=} 18 - 2x_2. \end{aligned}$$

Die Reaktionsfunktion des zweiten Unternehmens beträgt daher $x_1^R(x_2) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_2$.

Einsetzen dieser Reaktionsfunktion in die Reaktionsfunktion des zweiten Unternehmens liefert:

$$\begin{aligned} x_2^R\left(x_1^R(x_2)\right) &= 4 - \frac{3}{4}x_1^R \\ &= 4 - \frac{3}{4}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_2\right) \\ &= 4 - \frac{27}{8} + \frac{3}{8}x_2 \iff \\ \frac{5}{8}x_2^* &= \frac{5}{8} \iff x_2^* = 1 \\ x_1^* &= 4. \end{aligned}$$

Damit beträgt das Cournot-Nash-Gleichgewicht $(x_1^* = 4, x_2^* = 1)$.

**Aufgabe 2 (7 Punkte)**
Neun Personen leben in einer unbeleuchteten Straße und jede von ihnen ist bereit, €10 für jede weitere Straßenlaterne zu zahlen. Die Kosten für die Aufstellung von $x$ Laternen betragen $c(x) = x^3 + 15x$. Wie groß ist die pareto-optimale Anzahl an Laternen?

**Lösungsvorschlag:**
Um die pareto-optimale Anzahl an Laternen zu bestimmen, muss die aggregierte marginale Zahlungsbereitschaft mit den marginalen Kosten übereinstimmen:

$$\begin{aligned} 9 \cdot MZB &= MC(x) \iff \\ 9 \cdot 10 &= 3x^2 + 15 \iff \\ 3x^2 &= 75 \iff \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Es werden 5 Laternen aufgestellt.

**Aufgabe 3 (6 Punkte)**
In der folgenden Matrix gibt der erste Eintrag einer jeden Zelle die jeweilige Auszahlung des Zeilenwählers und der zweite Eintrag die jeweilige Auszahlung des Spaltenwählers bei der entsprechenden Strategiekombination an.

| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| $o$ | $(3,7)$ | $(4,7)$ |
| $u$ | $(3,2)$ | $(4,2)$ |

a) Ist die Strategiekombination $(o,l)$ pareto-optimal? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

b) Ist die Strategiekombination $(o,l)$ ein Nash-Gleichgewicht? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

**Lösungsvorschlag:**

(a) Nein. Die Strategiekombination $(o,r)$ stellt eine Pareto-Verbesserung gegenüber $(o,l)$ dar ($4 > 3$ und $7 = 7$).

(b) Ja, denn $3 = 3$ und $7 = 7$.

**Aufgabe 4 (6 Punkte)**
Ein Monopolist agiere auf einem Markt mit der inversen Nachfragefunktion $p(q) = -2q+40$. Die Kosten des Unternehmers sei durch $C(q) = 3q^2$ gegeben.

Berechnen Sie die Konsumenten- und Produzentenrente, falls der Monopolist die Menge $q = 4$ wählt!

**Lösungsvorschlag:**

Die Konsumentenrente bestimmt sich als die Fläche zwischen der Nachfrage und dem Preis $p = 32$.

Wir erhalten daher $KR = \frac{1}{2} \cdot (40 - 32) \cdot 4 = 16$.

Die Produzentenrente bestimmt sich als die Fläche zwischen dem Preis und der Grenzkostenkurve.

Wir erhalten daher $PR = \frac{1}{2} \cdot (32 - 0 + 32 - 24) \cdot 4 = 80$.

**Aufgabe 5 (4 Punkte)**
Es sei $X$ die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Für zwei Vektoren $x$ und $y$ betrachte man die folgende „größer"-Relation:

$$x = (x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) = y \text{ genau dann, wenn } x_1 \geq y_1 \text{ und } x_2 \geq y_2.$$

Begründen Sie mittels der Präferenzaxiome, ob diese Relation eine Präferenzrelation ist!

**Lösungsvorschlag:**

Eine Präferenzrelation erfüllt die Eigenschaften: Vollständigkeit, Transitivität und Reflexivität.

Die gegebene Relation erfüllt Vollständigkeit nicht. Zum Beispiel sind die Vektoren $(1, 2)$ und $(3, 1)$ nicht zu vergleichen. Daher ist die Relation auch keine Präferenzrelation.

**Aufgabe 6 (10 Punkte)**
Akteur $A$ hat Präferenzen für Güterbündel $(x_1, x_2)$, die durch die Nutzenfunktion

$$u^A(x_1^A, x_2^A) = \min\left\{x_1^A, 2x_2^A\right\}$$

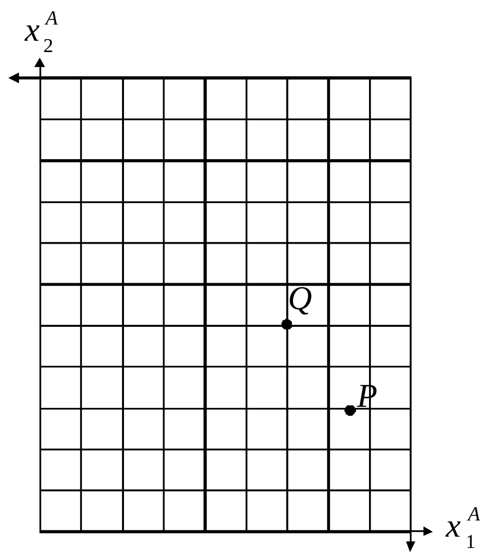
abgebildet werden. Akteur $B$ hat Präferenzen, die durch

$$u^B(x_1^B, x_2^B) = \min\left\{x_1^B, x_2^B\right\}$$

repräsentiert werden. Akteur $A$ hält die Anfangsausstattung $\omega_1^A = 6, \omega_2^A = 3$, Akteur $B$ hat die Anfangsausstattung $\omega_1^B = 3, \omega_2^B = 8$.

a) Zeichnen Sie die Tausch-Edgeworth-Box zu dieser Situation möglichst exakt in das beigefügte Raster ein! *Beschriften Sie die eingezeichneten Objekte hinlänglich!* Ihre Zeichnung sollte zumindest folgende Objekte abbilden:

- die Anfangsausstattung $\omega$ der beiden Akteure,
- die Indifferenzkurve für jeden Akteur, die durch die Anfangsausstattung verläuft.
- die Echt-Bessermenge des Akteurs $A$ bezüglich der Anfangsausstattung
- die Tauschlinse

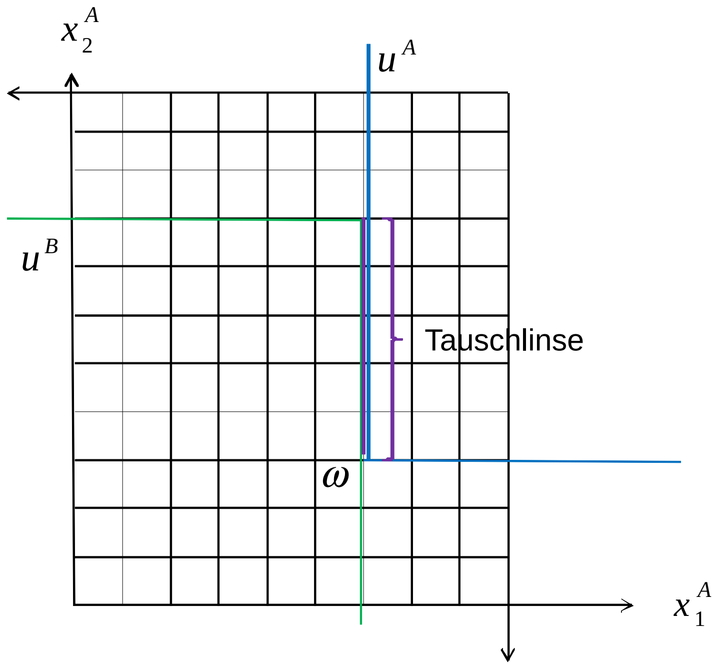



b) Im Diagramm sind die Allokationen $P$ und $Q$ eingezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? *Kreuzen Sie an, und begründen Sie kurz!*

$P$ stellt eine Pareto-Verbesserung gegenüber $\omega$ dar. Richtig o
Begründung: Falsch o

$Q$ stellt eine Pareto-Verbesserung gegenüber $\omega$ dar. Richtig o
Begründung: Falsch o

**Lösungsvorschlag:**




Die Echt Besser-Menge von Agent $A$ ist dasjenige Gebiet, dass rechts und oberhalb der blauen Indifferenzkurve liegt.

| | | |
|---|---|---|
| $P$ stellt eine Pareto-Verbesserung gegenüber $\omega$ dar. | Richtig | o |
| Begründung: | Falsch | x |
| $u^B(\omega) = 3 > u^B(P) \approx 2,5$ | | |
| also ist $B$ in $P$ schlechter gestellt als in $\omega$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| $Q$ stellt eine Pareto-Verbesserung gegenüber $\omega$ dar. | Richtig | o |
| Begründung: | Falsch | x |
| $u^A(\omega) = u^A(Q) = 6$, $u^B(Q) = u^B(\omega) = 3$ | | |
| kein Agent wird besser gestellt | | |

**Aufgabe 7 (8 Punkte)**
Ein Haushalt besitze Präferenzen für Güterbündel $(x_1, x_2)$, die durch die Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

abgebildet werden. Es gelte $m > p_1$.

a) Bestimmen Sie die Nachfrage nach $x_2$, falls $m = 10$, $p_1 = 2, p_2 = 1$!

b) Zeichnen Sie die Engelkurve für Gut 2!

**Lösungsvorschlag:**
Die Präferenzen sing offenbar streng monoton. Wir bilden die MRS zur Überprüfung von Konvexität/Konkavität:

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{1}{\frac{1}{x_2}} = x_2.$$

Die MRS ist monoton wachsend in $x_2$, die Präferenzen sind folglich konvex. Im Haushaltsoptimum muss daher gelten

$$MRS \stackrel{!}{=} MOC.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}.$$

Es ist noch zu prüfen, ob diese Menge zu Einkommen $m$ konsumiert werden kann. Der Haushalt kann maximal $\frac{m}{p_2}$ Einheiten von Gut 2 konsumieren. Da $m > p_1$ gilt, ist es also möglich $\frac{p_1}{p_2}$ zu konsumieren. Wir erhalten nun durch einsetzen der Preise die Nachfrage nach Gut 2:

$$x_2^* = 2.$$

Für $m < p_1$ folgt $x_2^* = \frac{m}{p_2}$, da die Menge $\frac{p_1}{p_2}$ nicht erreichbar ist. Die Engelkurve ist also zunächst linear und monoton wachsend und ab einem Einkommen von $p_1$ konstant.

**Aufgabe 8 (8 Punkte)**
Richards Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2.$$

Dabei steht $x_1$ für die von ihm konsumierte Menge von Gut 1 und $x_2$ für die von ihm konsumierte Mengen von Gut 2. Der Preis von Gut 1 beträgt $p_1 = 8$ pro Mengeneinheit und der Preis von Gut 2 genau 2 Geldeinheiten pro Mengeneinheit. Richard besitzt 8 Geldeinheiten.

a) Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution! Wie ändert sich diese mit steigendem $x_1$?

b) Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Grenzrate der Substitution ist gegeben durch:

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{2x_1}{1}.$$

Bei steigendem $x_1$ steigt die Grenzrate der Substitution.

b) Bei diesen konkaven Präferenzen ist das Randoptimum zu bestimmen.

$$\begin{aligned} U\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) &= U(1,0) = 1 \\ U\left(0, \frac{m}{p_2}\right) &= U(0,4) = 4. \end{aligned}$$

Da $4 > 1$ ist das Haushaltsoptimum durch $(x_1 = 0, x_2 = 4)$ gegeben.

**Aufgabe 9 (12 Punkte)**

Ein Unternehmen produziert ein Gut mit einer Technologie, die durch die Produktionsfunktion $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ gegeben ist. Der Faktorpreis $w$ und der Verkaufspreis $p$ des Gutes sind fest vorgegeben.

a) Untersuchen Sie, ob die Produktionsfunktion wachsende Skalenerträge aufweist.

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion!

**Aufgabe 9 (Fortsetzung)**

c) Bestimmen Sie die Nachfragefunktion für das Input-Gut!

d) Wie viel wird das Unternehmen produzieren?

**Lösungsvorschlag**

(a) Wir betrachten $t > 1$ und ermitteln:

$$\begin{aligned} f(t \cdot x) &= \sqrt[3]{t \cdot x} \\ &= \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} \\ &= t^{\frac{1}{3}} \cdot f(x), \end{aligned}$$

d.h. es liegen fallende Skalenerträge vor. Ein Gegenbeispiel kann ebenso bestätigen, dass die Produktionsfunktion keine wachsenden Skalenerträge aufweist.

(b) Bei Input $x$ erhalten wir den Output $x^* = y^3$.

Wir können nun die Kostenfunktion in Abhängigkeit des Outputs bestimmen:

$$\begin{aligned} C(y) &= w \cdot x^* \\ &= w \cdot y^3. \end{aligned}$$

(c) Die Bedingung für den optimalen Faktoreinsatz ist gegeben durch:

$$p \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = p\frac{df}{dx} = w.$$

Wir lösen diese Gleichung für $x$ und erhalten:

$$\begin{aligned} x^{-\frac{2}{3}} &= \frac{3w}{p} \\ x &= \left(\frac{3w}{p}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{p}{3w}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

(d) Mit Hilfe der Gewinnmaximierungsbedingung und dem Ergebnis aus $b$) erhalten wir

$$p \stackrel{!}{=} MC = \frac{dC}{dy} = 3y^2 \cdot w$$

und somit

$$y = \sqrt{\frac{p}{3w}}.$$

**Aufgabe 10 (7 Punkte)**
Ein Individuum habe die von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion

$$u(x) = x^2,$$

wobei $x$ für das Vermögen des Individuums steht. Das Individuum verfügt über ein Einkommen in Höhe von 5 Geldeinheiten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$droht ein Verlust in Höhe von 3 Geldeinheiten, mit ebenso großer Wahrscheinlichkeit winkt ein Gewinn von 3 Geldeinheiten.

a) Stellen Sie die Situation als Lotterie dar!

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Lotterie!

c) Ermitteln Sie das Sicherheitsäquivalent der Lotterie!

**Lösungsvorschlag**

a) $L = \left[5+3, 5-3; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[8, 2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) $E(L) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 5.$

c) Das Sicherheitsäquivalent $CE(L)$ erhält man über den Ansatz

$$u(CE(L)) = E_u(L),$$

also

$$CE(L)^2 = \frac{1}{2} \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 34$$

und damit

$$CE(L) = \sqrt{34}.$$