Aufgabe 1 (6 Punkte)
Konsument Thorben hat monotone Präferenzen, die sich über die Zeit nicht ändern. Er geht jeden Mittag in die Gaststube 'Zum güldenen Horn'. Er verzehrt dort ausschließlich Bockbier, x_B, und Gänseleber, x_G. Die Gaststube wird von dem geschäftstüchtigen Diplom-Kaufmann Baldur von Bacharach geführt, dessen Marketingstrategie darin besteht, den Preis von Bockbier, p_B, und von Gänseleber, p_G, ständig zu variieren. Hier eine Liste der Preise und der Entscheidungen Thorbens zu zwei Zeitpunkten:

Zeitpunkt	Preise		Mahlzeiten	
	p_B	p_G	x_B	x_G
a	3	1	3	1
b	1	3	1	3

Isst Thorben rational? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag:
Thorben isst nicht rational. Das kann man zum Beispiel wie folgt begründen:

Zum Zeitpunkt a kostet die Mahlzeit a genau $p_B^a \cdot x_B^a + p_G^a \cdot x_G^a = 10$ Geldeinheiten, während die Mahlzeit b nur $p_B^a \cdot x_B^b + p_G^a \cdot x_G^b = 6$ Geldeinheiten kostet. Aus der Tatsache, dass trotz des höheren Preises Mahlzeit a statt Mahlzeit b gewählt wird folgt, dass Thorben a gegenüber b zumindest schwach vorzieht, $a \succeq b$.

Zum Zeitpunkt b kostet Mahlzeit b offenbar 10 Geldeinheiten, während Mahlzeit a schon für 6 Geldeinheiten zu haben ist. Wenn Thorben anstatt Mahlzeit b Mahlzeit a wählen würde, bleiben ihm 4 Geldeinheiten übrig, die er für weitere Einheiten Bockbier und Gänseleber ausgeben kann. Aufgrund seiner monotonen Präferenzen würde er sich damit echt besser stellen. Da Thorben diese Option nicht wahrnimmt, isst er nicht rational.

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Die Präferenzen eines Haushalts mit einem Geldeinkommen in Höhe von $m = 12$ werden durch die Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

repräsentiert. Dabei bezeichnet x_1 die von Gut 1 und x_2 die von Gut 2 konsumierte Menge. Für den Preis des zweiten Gutes gilt $p_2 = 2$, der Preis von Gut 1 wird variiert.

(a) Bestimmen Sie die Haushaltsoptima für die Preise $p_1 = 3$, $p_1 = 4$ und $p_1 = 5$!

(b) Bestimmen Sie allgemein die Haushaltsoptima in Abhängigkeit des Preises von Gut 1!

(c) Zeichnen Sie im beigefügten $x_1 - x_2-$Koordinatensystem die Preis-Konsum-Kurve, d.h. den geometrischen Ort aller Haushaltsoptima bei variierendem Preis p_1!

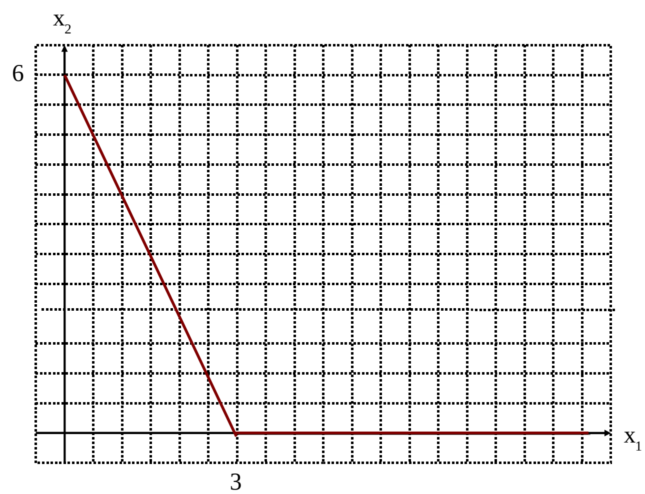
Lösungsvorschlag:

(a) Gilt für den Preis des ersten Gutes $p_1 = 3$, so folgt $\frac{3}{2} = \frac{p_1}{p_2} < MRS = \frac{2}{1}$; der Betrag des Anstiegs der Budgetgerade ist also kleiner als der Betrag des Anstiegs der Indifferenzkurven. Der Haushalt wird dann die höchste Indifferenzkurve erreichen, wenn er ausschließlich Gut 1 konsumiert, d.h. $x_1^* = \frac{12}{3} = 4$, $x_2^* = 0$. Gilt $p_1 = 4$, entspricht der Anstieg der Budgetgerade dem Anstieg der Indifferenzkurven; alle Güterbündel auf der Budgetgeraden bilden dann das Haushaltsoptimum. Beim Preis $p_1 = 5$ folgt $\frac{5}{2} = \frac{p_1}{p_2} > MRS = \frac{2}{1}$, und somit für das HH-Optimum $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{12}{2} = 6$.

(b) Aufgrund der linearen Nutzenfunktion und der Überlegungen zu Teilaufgabe (a) ergibt sich das folgende Nachfrageverhalten des Haushalts:

p_1	Haushaltsoptimum
> 4	$x_1^* = 0$, $x_2^* = 6$
$= 4$	alle $x_1, x_2 \geq 0$, so dass $12 = 4x_1 + 2x_2$
< 4	$x_1^* = \frac{12}{p_1}$, $x_2^* = 0$

(c) Man erhält die folgende Preis-Konsum Kurve:



Aufgabe 3 (8 Punkte)
Betrachten Sie die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Die Faktorpreise sind $w_1 = 4$ und $w_2 = 1$. Bestimmen Sie die langfristige Kostenfunktion!

Lösungsvorschlag:
Optimaler Einsatz der Produktionsfaktoren impliziert, dass

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = \frac{x_2}{x_1} \overset{!}{=} \frac{4}{1} = \frac{w_1}{w_2}$$

erfüllt ist. Wir substituieren die Bedingung $x_2(x_1) = 4 \cdot x_1$ in die Produktionsfunktion

$$y = x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (4 \cdot x_1) = 4 \cdot (x_1)^2$$

und lösen diesen Ausdruck nach x_1 auf,

$$x_1(y) = \frac{\sqrt{y}}{2},$$

wobei wir eine Lösung der quadratischen Gleichung aufgrund der Nichtnegativität von y ausschließen. Es ergibt sich also die langfristige Kostenfunktion

$$\begin{aligned} C(y) &= w_1 \cdot x_1(y) + w_2 \cdot x_2(x_1(y)) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{y}}{2} + 1 \cdot 4 \cdot x_1(y) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{y}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{y}}{2} = 4 \cdot \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$. Es hat keinen Einfluss auf die Faktorpreise w_1 und w_2 sowie den Güterpreis p. Kurzfristig kann das Unternehmen die Einsatzmenge des zweiten Produktionsfaktors nicht variieren und muss von diesem 16 Einheiten einsetzen.
Bestimmen Sie die kurzfristige Faktornachfragefunktion für den ersten Produktionsfaktor!

Lösungsvorschlag:
Da kurzfristig $x_2 = 16$ gilt, folgt für die kurzfristige Produktionsfunktion:

$$f(x_1, 16) = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot 4.$$

Gewinnmaximierung im Inputraum verlangt jetzt die Maximierung der Gewinnfunktion

$$\Pi(x_1, 16) = p \cdot x_1^{\frac{1}{2}} \cdot 4 - 9 \cdot w_2 - x_1 \cdot w_1.$$

Differenzieren und Nullsetzen führt zur kurzfristigen Faktornachfragefunktion:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dx_1} &= p \cdot 2 \cdot x_1^{-\frac{1}{2}} - w_1 \overset{!}{=} 0 \\ 4\frac{p^2}{w_1^2} &= x_1(w_1). \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Die Unternehmen einer Branche befinden sich im vollständigen Wettbewerb. Die Unternehmen dieser Branche haben die folgende langfristige Kostenfunktion,

$$C(y) = \begin{cases} 9 + y^2, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

wobei y die produzierte Menge bezeichnet. Die Marktnachfrage für die Branche ist durch $Y(p) = 24 - 2p$ gegeben, wobei Y die gesamte nachgefragte Menge und p den Preis bezeichnet. Es herrscht freier Marktzutritt und freier Marktaustritt.

(a) Ermitteln Sie die Grenz- und Durchschnittskosten eines einzelnen Unternehmens!

(b) Wie viele Unternehmen werden im langfristigen Wettbewerbsgleichgewicht auf diesem Markt agieren?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Grenzkosten sind mit

$$\frac{dC(y)}{dy} = 2y$$

erklärt, die Durchschnittkosten betragen

$$\frac{C(y)}{y} = \frac{9}{y} + y.$$

(b) Wir verwenden die Bedingung

$$\frac{dC(y)}{dy} = 2y \stackrel{!}{=} \frac{9}{y} + y = \frac{C(y)}{y}$$

um $y = 3$ abzuleiten. Es sei n die Anzahl der Unternehmen auf dem Markt; dann gilt

$$n \cdot y = Y(p) = 24 - 2p.$$

Außerdem muss im Marktgleichgewicht

$$\frac{dC(y)}{dy} = 2y = 2 \cdot 3 \stackrel{!}{=} p$$

erfüllt sein. Durch Substitution können wir schließlich

$$n = \frac{24 - 2p}{y} = \frac{12}{3} = 4$$

gewinnen.

Aufgabe 6 (13 Punkte)
Gehen Sie von der inversen Nachfragefunktion $p(Y) = 10 - Y$ aus, wobei $p(Y)$ der Preis bei der nachgefragten Menge Y ist. Auf diesem Markt agieren 4 Unternehmen, deren Kostenfunktion jeweils durch

$$C(y) = \begin{cases} 5, & y = 1, \\ \infty, & y > 1, \end{cases}$$

gegeben ist, d.h. ein Unternehmen sieht sich nach der ersten Produktionseinheit mit prohibitiv hohen Kosten konfrontiert.
Bitte fertigen Sie im Folgenden möglichst *exakte* Graphiken in den vier beigefügten Preis-Mengen Diagrammen an!

(a) Zeichnen Sie die Angebotsfunktion eines solchen Unternehmens in Diagramm (a)!

(b) Zeichnen Sie die aggregierte Angebotsfunktion der 4 Unternehmen und die inverse Nachfragefunktion in Diagramm (b)! Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die abgesetzte Menge!

(c) Es kommen nun 4 weitere Unternehmen auf den Markt, deren Kostenfunktion mit

$$C(y) = \begin{cases} 3, & y = 1, \\ \infty, & y > 1, \end{cases}$$

beschrieben ist. Bestimmen Sie graphisch die Angebotsfunktion eines solchen neuen Unternehmens in Diagramm (c)!

(d) Überlegen Sie sich nun die aggregierte Angebotsfunktion aller acht Unternehmen! Zeichnen Sie diese und die inverse Nachfragefunktion in Diagramm (d). Bestimmen Sie wiederum den Gleichgewichtspreis sowie die abgesetzte Menge!

Lösungsvorschlag:

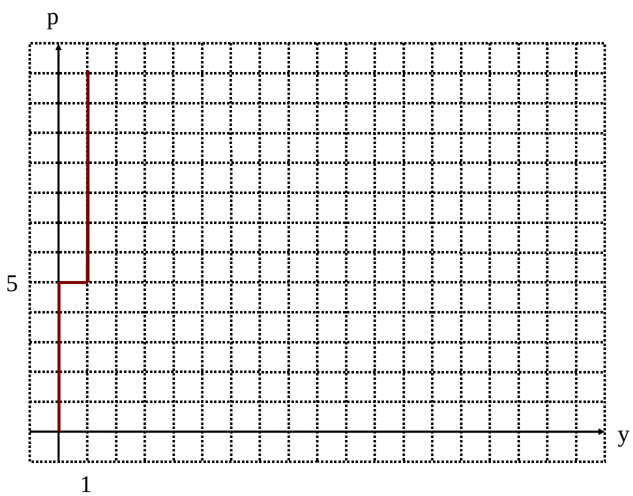


Diagramm (a)

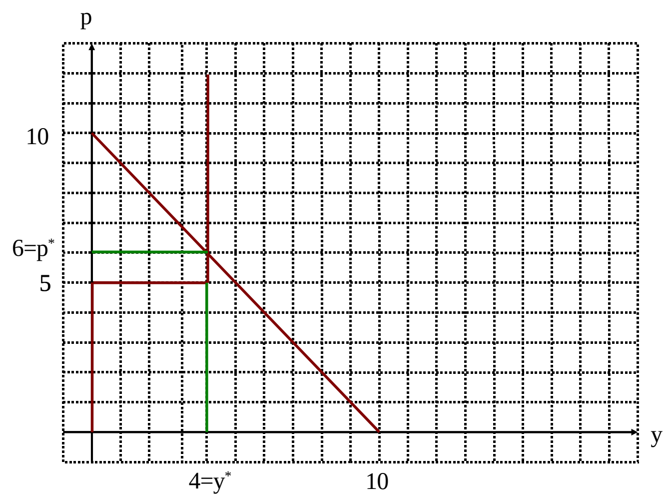


Diagramm (b)

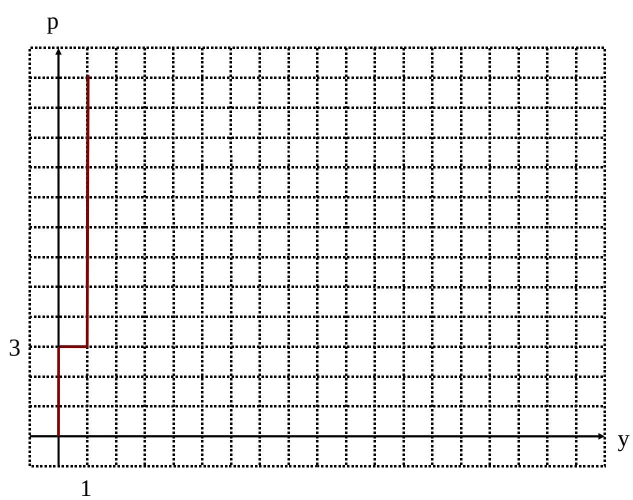


Diagramm (c)

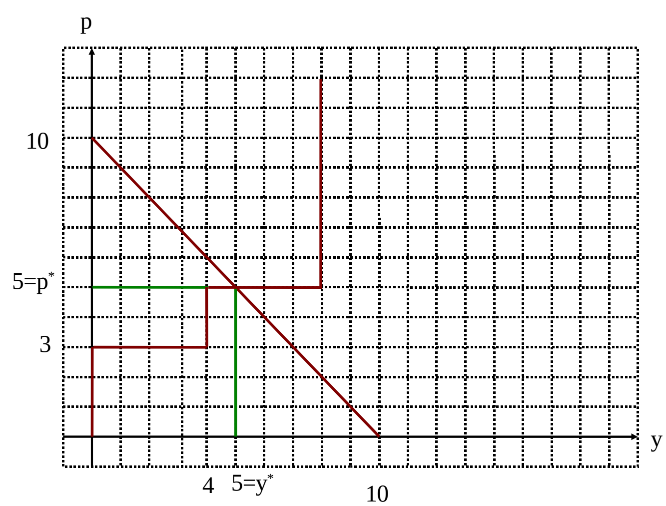


Diagramm (d)

Aufgabe 7 (9 Punkte)
Marieluise und Elke treffen sich nach der Schule, um ihre Murmelsammlungen zu bestaunen. Beide Sammlungen bestehen aus roten und blauen Murmeln. Marieluise besitzt 9 rote und 9 blaue Murmeln, Elke 2 rote und 16 blaue Murmeln. Die Wertschätzung für Murmeln wird für Marieluise durch die Nutzenfunktion

$$u^M\left(x_r^M, x_b^M\right) = \left(x_r^M\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x_b^M\right)^{\frac{1}{2}}$$

und für Elke durch die Nutzenfunktion

$$u^E\left(x_r^E, x_b^E\right) = \left(x_r^E\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(x_b^E\right)^{\frac{1}{2}}$$

repräsentiert. Dabei bezeichnet x_r jeweils die Anzahl der roten und x_b jeweils die Anzahl der blauen Murmeln.
Werden die beiden überein kommen Murmeln zu tauschen? Wenn ja, in welcher Richtung erfolgt der Tausch? Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösungsvorschlag:
Die Grenzraten der Substitution lauten zunächst allgemein:

$$\begin{aligned} MRS^M &= \frac{MU_r^M}{MU_b^M} = \frac{\frac{1}{2}\left(x_r^M\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_b^M\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(x_b^M\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_r^M\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_b^M}{x_r^M}, \\ MRS^E &= \frac{MU_r^E}{MU_b^E} = \frac{\frac{1}{4}\left(x_r^E\right)^{-\frac{3}{4}}\left(x_b^E\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(x_b^E\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_r^E\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\frac{x_b^E}{x_r^E}. \end{aligned}$$

Bei den jeweiligen Anfangsausstattungen resultiert:

$$\begin{aligned} MRS^M &= 1, \\ MRS^E &= 4. \end{aligned}$$

Auf Grund der Ungleichheit der MRS lohnt sich ein Murmeltausch. Wenn Marieluise beispielsweise eine rote Murmel abgibt, so möchte sie im Gegenzug mindestens eine blaue Murmel, um ihr Nutzenniveau zu halten. Erhält Elke diese eine rote Murmel, so ist sie bereit, bis zu vier blaue abzugeben. Gibt sie Elke bspw. 2 blaue Murmeln im Tausch gegen eine rote, sind die Tauschbedingungen beider erfüllt.

Aufgabe 8 (6 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Bimatrixspiel, in dem jeweils der linke Eintrag die Auszahlung des Zeilenwählers und der rechte Eintrag die Auszahlung des Spaltenwählers darstellt:

	s_1	s_2
z_1	$(a, 3)$	$(2, 3)$
z_2	$(5, 4)$	$(5, b)$

(a) Für welche Parameter a ist z_2 eine dominante Strategie?

(b) Für welche Parameter b ist s_2 eine dominante Strategie?

(c) Für welche Parameter a, b ist (z_2, s_1) ein Nash-Gleichgewicht?

Lösungsvorschlag:

(a) Da $5 > 2$ muss $a \leq 5$ erfüllt sein, damit z_2 eine dominante Strategie für den Zeilenwähler ist.

(b) Da $3 = 3$ gibt es kein b, so dass s_2 eine dominante Strategie für den Spaltenwähler ist.

(c) Genau dann, wenn $a \leq 5$ und $b \leq 4$, ist (z_2, s_1) ein Nash-Gleichgewicht.

Anmerkung 1: Bei der Bewertung wird nicht berücksichtigt, ob die Ungleichungen streng angegeben werden oder nicht.

Anmerkung 2: Für die folgende Antwort auf Teilaufgabe (b) vergeben wir auch die volle Punktzahl: Da $3 = 3$ muss $b > 4$ sein, damit s_2 eine dominante Strategie für den Spaltenwähler ist.

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Ein Unternehmen agiert als alleiniger Anbieter auf einem Markt, der durch die inverse Nachfragefunktion

$$p(X) = 80 - 2X$$

charakterisiert wird. Dabei bezeichnet X die auf dem Markt gehandelte Menge und $p(X)$ den Preis des Gutes. Die Kostenfunktion des Unternehmens lautet

$$C(X) = \frac{1}{2}X^2.$$

Bestimmen Sie die Menge X, mit der das Unternehmen seinen *Umsatz* **(!)** maximiert!

Lösungsvorschlag:
Der Umsatz des Unternehmens in Abhängigkeit von X beträgt:

$$R(X) = p(X) \cdot X = (80 - 2X) \cdot X.$$

Differenzieren und Nullsetzen ergibt die Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{dR(X)}{dX} &= 80 - 4X \overset{!}{=} 0, \\ X^{R_{\max}} &= 20. \end{aligned}$$

Aufgabe 10 (6 Punkte)
Tina und Katja leben in einer Zweier-WG. Beide erfreuen sich am Anblick der Blumen auf ihrem Balkon. Katjas marginale Zahlungsbereitschaft für eine weitere Blume beträgt 8, die Tinas $\frac{1}{2}y$, wobei y die Anzahl der Blumen bezeichnet.

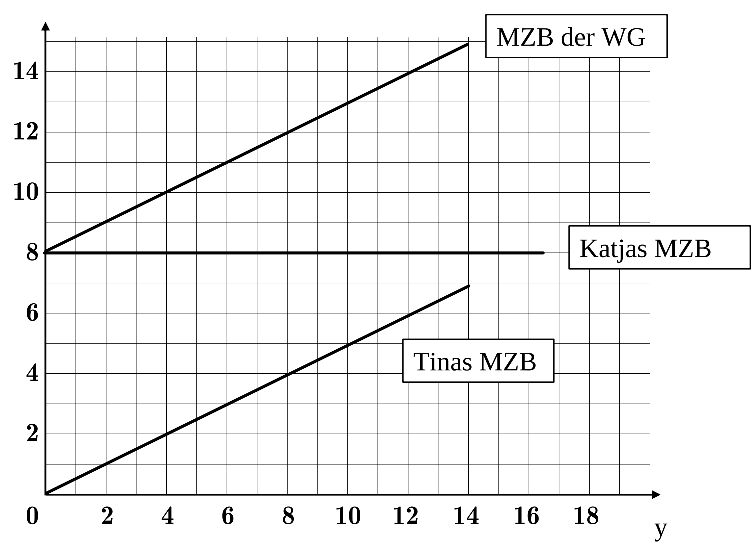
(a) Zeichnen Sie die beiden Funktionen, die jeweils die marginalen Zahlungsbereitschaften von Katja und Tina widerspiegeln. Aggregieren Sie die marginalen Zahlungsbereitschaften sowohl graphisch als auch analytisch! Nutzen Sie für die Zeichnung das beigefügte Raster/Diagramm!

(b) Auf dem Balkon der WG befinden sich vier Pflanzen. Von einem Nachbarn können die beiden eine weitere Blume zum Preis von 9 erstehen. Werden sich die beiden für den Kauf entscheiden? Begründen Sie!

Lösungsvorschlag:

(a) Die Summe der marginalen Zahlungsbereitschaften ergibt sich durch:

$$MZB_{WG}(y) = MZB_K(y) + MZB_T(y) = 8 + \frac{1}{2}y.$$



(b) Die beiden verfügen (an der Stelle $y = 4$) über eine marginale Zahlungsbereitschaft von 10 für eine weitere Pflanze. Da $MZB_{WG}(4) > 9$ gilt, werden beide die Blume kaufen.