

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Individuum habe die von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

wobei x für das Vermögen des Individuums steht. Das Individuum verfügt über ein Einkommen in Höhe von 10 Geldeinheiten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ droht ein **Verlust** in Höhe von 6 Geldeinheiten, mit ebenso großer Wahrscheinlichkeit winkt ein **Gewinn** von 6 Geldeinheiten.

- (a) Stellen Sie die Situation als Lotterie dar!
- (b) Ermitteln Sie den Erwartungswert der Lotterie!
- (c) Ermitteln Sie den erwarteten Nutzen der Lotterie!
- (d) Ermitteln Sie das Sicherheitsäquivalent der Lotterie!

Lösungsvorschlag

(a) $L = \left[10 + 6, 10 - 6; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] = \left[16, 4; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

(b) $E_L = \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 10$.

(c) $E_L(u) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 3$.

(d) Das Sicherheitsäquivalent $CE(L)$ erhält man über den Ansatz

$$u(CE(L)) = E_L(u),$$

also

$$\sqrt{CE(L)} = 3$$

und damit

$$CE(L) = 9.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sind normale Güter stets gewöhnliche Güter? Nutzen Sie für die Antwort die Slutsky-Gleichung beim Budget als Geldbetrag!

Lösungsvorschlag

Die Slutsky-Gleichung bei Geldeinkommen lautet wie folgt:

$$\frac{\partial x_1^G}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial x_1^S}{\partial p_1}}_{\text{Substitutionseffekt}} - \underbrace{\frac{\partial x_1^G}{\partial m} \cdot x_1^B}_{\text{Einkommenseffekt}} .$$

Sie zerlegt den Gesamteffekt einer Preisänderung in einen Substitutionseffekt und in einen Einkommenseffekt. Der Substitutionseffekt ist immer negativ. Für normale Güter gilt $\frac{\partial x_1^G}{\partial m} > 0$, so dass der Einkommenseffekt ebenfalls negativ ist. Gewöhnliche Güter sind jene Güter, bei denen der Gesamteffekt negativ ist. Dies ist bei den hier betrachteten normalen Gütern der Fall, da beide Einzeleffekte negativ sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2$$

wobei x_1 für die von Produktionsfaktor 1 und x_2 für die von Produktionsfaktor 2 eingesetzte Menge zur Herstellung des Produkts y steht. Die Faktorpreise lauten $w_1 = 5$ und $w_2 = 4$. Kurzfristig ist die Einsatzmenge des zweiten Produktionsfaktors nicht variierbar und beträgt $x_2 = 10$.

Bestimmen Sie die kurzfristige Kostenfunktion!

Lösungsvorschlag

Die kurzfristige Produktionsfunktion lautet:

$$y = f_s(x_1, 10) = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot 10.$$

Zur Herstellung von y Einheiten werden demnach

$$x_1(y) = \left(\frac{y}{10}\right)^2$$

Einheiten des ersten Produktionsfaktors benötigt. Für die Kosten in Abhängigkeit von y ergibt sich dann

$$\begin{aligned} c_s(y) &= w_1 \cdot x_1(y) + w_2 \cdot 10 \\ &= 5 \cdot \frac{y^2}{100} + 40 = \frac{1}{20}y^2 + 40. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

In einer Tauschwirtschaft leben 2 Individuen A und B. Die Nutzenfunktionen der beiden sind identisch und wie folgt gegeben

$$\begin{aligned}u^A(x_1^A, x_2^A) &= x_1^A \cdot x_2^A \\u^B(x_1^B, x_2^B) &= x_1^B \cdot x_2^B\end{aligned}$$

In der Tauschwirtschaft sind insgesamt 12 Einheiten von Gut 1 und 8 Einheiten von Gut 2 verfügbar.

Ermitteln Sie die Menge aller Pareto-optimalen Allokationen!

Lösungsvorschlag

Es sind all jene Allokationen Pareto-optimal, bei denen die Grenzraten der Substitution der beiden Individuen übereinstimmen

$$\begin{aligned}MRS^A &= MRS^B \\ \frac{x_2^A}{x_1^A} &= \frac{x_2^B}{x_1^B}.\end{aligned}$$

Für x_2^B und x_1^B kann nun das Folgende eingesetzt werden

$$\begin{aligned}x_2^B &= 8 - x_2^A \\ x_1^B &= 12 - x_1^A.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{x_2^A}{x_1^A} &= \frac{8 - x_2^A}{12 - x_1^A} \\ (12 - x_1^A)x_2^A &= (8 - x_2^A)x_1^A \\ 12x_2^A &= 8x_1^A \\ x_1^A &= \frac{3}{2}x_2^A.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Die Nachfrage für ein Gut auf einem Markt mit vollkommener Konkurrenz ist durch die Nachfragefunktion $Y(p) = 10 \cdot (6 - p)$ gegeben, wobei $Y(p)$ die beim Marktpreis p insgesamt nachgefragte Menge bezeichnet. Die auf diesem Markt agierenden Unternehmen haben dieselbe langfristige Kostenfunktion

$$C(y) = \begin{cases} 9 + y^2 & , y > 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} ,$$

wobei y die von einem einzelnen Unternehmen produzierte Menge bezeichnet.

- Ermitteln Sie den Prohibitivpreis!
- Wie viele Unternehmen werden im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht auf diesem Markt anbieten?
- Der Staat subventioniert nun jedes tatsächlich am Markt agierende Unternehmen ($y > 0$) mit einer Pauschalsubvention in Höhe von 5. Wie ändert sich die Anzahl der am Markt agierenden Unternehmen? Welcher Preis und welche Gesamtmenge stellen sich dann ein?

Lösungsvorschlag

- Beim Prohibitivpreis p^{proh} ist die nachgefragte Menge gerade 0. Durch Auflösen von

$$0 = Y(p^{proh}) = 10 \cdot (6 - p^{proh})$$

erhält man $p^{proh} = 6$.

- Im langfristigen Gleichgewicht gilt

$$p(Y^*) = AC(y^*) = MC(y^*)$$

wobei Y^* die im langfristigen Gleichgewicht insgesamt produzierte und y^* die von einem einzelnen Unternehmen produzierte Menge bezeichnet. Über

$$\frac{9}{y^*} + y^* = \frac{C_A(y^*)}{y^*} = AC(y^*) \stackrel{!}{=} MC(y^*) = \frac{dC}{dy} = 2y^*$$

bestimmen wir

$$y_A^* = 3.$$

Das Minimum der Durchschnittskosten und damit der langfristige Gleichgewichtspreis beträgt dann

$$p^* = p(Y^*) = AC^{\min} = AC(y^*) = \frac{9}{3} + 3 = 6.$$

Einsetzen in die Nachfragefunktion ergibt die insgesamt produzierte Menge

$$Y^* = Y(p^*) = 10 \cdot (6 - 6) = 0.$$

Die im langfristigen Gleichgewicht auf dem Markt agierende Anzahl von Unternehmen ist also

$$n^* = 0.$$

Bemerkung: Das Minimum der Durchschnittskosten entspricht hier gerade dem Prohibitivpreis.

(c) Mit der Subvention lautet die langfristige Kostenfunktion faktisch

$$C(y) = \begin{cases} 9 + y^2 - 5 & , y > 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4 + y^2 & , y > 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} .$$

Wie oben rechnet man dann

$$\frac{4}{y^*} + y^* = \frac{C_A(y^*)}{y^*} = AC(y^*) \stackrel{!}{=} MC(y^*) = \frac{dC}{dy} = 2y^*$$

$$y_A^* = 2$$

$$p^* = p(Y^*) = AC^{\min} = AC(y^*) = \frac{4}{2} + 2 = 4$$

$$Y^* = Y(p^*) = 10 \cdot (6 - 4) = 20$$

Da ein einzelnes Unternehmen die Menge $y^* = 2$ anbietet, erhalten wir die im langfristigen Gleichgewicht auf dem Markt agierende Anzahl von Unternehmen

$$n^* = \frac{Y^*}{y^*} = \frac{20}{2} = 10.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Bimatrixspiel, in dem die Auszahlungen des Spielers 1 links und die Auszahlungen des Spielers 2 rechts eingetragen sind:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	4, 3	7, 2
	unten	4, 1	3, 0

- (a) Besitzt Spieler 2 eine dominante Strategie?
- (b) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte!

Geben Sie jeweils die relevanten Ungleichungen an!

Lösungsvorschlag

- (a) Es gilt $3 > 2$ und $1 > 0$. Also ist die Strategie „links“ dominant.
- (b) Da „links“ dominant ist, wählt Spieler 2 in jedem Gleichgewicht „links“. Dann ist Spieler 1 indifferent zwischen „oben“ und „unten“, $4 = 4$. Das Spiel besitzt also zwei Gleichgewichte (oben, links) und (unten, links).

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Ein Monopolist produziert ein Gut in zwei Betriebsstätten, A und B , mit den Kostenfunktionen

$$\begin{aligned} C_A(y_A) &= y_A^2, \\ C_B(y_B) &= 2y_B, \end{aligned}$$

wobei y_A die in Betriebsstätte A und y_B die in Betriebsstätte B hergestellte Menge bezeichnet. Die Nachfrage für dieses Gut ist durch die inverse Nachfragefunktion

$$p(Y) = 10 - Y$$

gegeben: Die Menge Y kann zum Preis von $p(Y)$ abgesetzt werden.

Welche Mengen stellt der Monopolist in den beiden Betriebsstätten her?

Lösungsvorschlag

Erste Variante: Der Monopolist maximiert den Gesamtgewinn

$$\begin{aligned} G(y_A, y_B) &= p(y_A, y_B)(y_A + y_B) - C_A(y_A) - C_B(y_B) \\ &= (10 - y_A - y_B)(y_A + y_B) - y_A^2 - 2y_B. \end{aligned}$$

Auflösen der Maximierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_A} &= \frac{\partial((10 - y_A - y_B)(y_A + y_B) - y_A^2 - 2y_B)}{\partial y_A} = -4y_A^* - 2y_B^* + 10 \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y_B} &= \frac{\partial((10 - y_A - y_B)(y_A + y_B) - y_A^2 - 2y_B)}{\partial y_B} = -2y_A^* - 2y_B^* + 8 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

ergibt die Mengen

$$y_A^* = 1 \quad \text{und} \quad y_B^* = 3.$$

Zweite Variante: Der Monopolist maximiert den Gesamtgewinn, wenn

$$MC_A \stackrel{!}{=} MC_B \stackrel{!}{=} MR$$

gilt. Auflösen von

$$MC_A = \frac{d(y_A^2)}{dy_A} = 2y_A^* = 2 = \frac{d(2y_B)}{dy_B} = MC_B$$

ergibt

$$y_A^* = 1.$$

Über

$$MR = \frac{d(p(Y) \cdot Y)}{dY} = \frac{d((10 - Y)Y)}{dY} = 10 - 2Y$$

und Auflösen von

$$MC_B = 2 \stackrel{!}{=} 10 - 2(2 + y_B^*) = 10 - 2(y_A^* + y_B^*) = 10 - 2Y^* = MR$$

erhält man schließlich

$$y_B^* = 3.$$

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Zwei Unternehmen, 1 und 2, produzieren in unmittelbarer Nähe voneinander und haben die folgenden Gewinnfunktionen:

$$\begin{aligned}G_1(y_1, y_2) &= 5y_1 - y_1^2 - y_1y_2, \\G_2(y_1, y_2) &= 5y_2 - y_2^2 + y_1y_2,\end{aligned}$$

wobei y_1 die von Unternehmen 1 und y_2 die von Unternehmen 2 produzierte Menge bezeichnet.

- Treten externe Effekte auf? Wenn ja, was für welche? Begründen Sie!
- Gehen Sie davon aus, dass beide Unternehmen unabhängig voneinander ihren Gewinn maximieren. Welche Mengen werden sie produzieren? Wie hoch ist dann jeweils der Gewinn?
- Gehen Sie nun davon aus, dass die beiden Unternehmen Teile eines Konzerns sind, der den Gesamtgewinn maximiert. Welche Mengen werden jetzt produziert? Wie hoch ist dann der gemeinsame Gewinn?

Lösungsvorschlag

- Einerseits wird der Gewinn von Unternehmen 1 durch Unternehmen 2 negativ beeinflusst, der Term $-y_1y_2$ in der Gewinnfunktion von Unternehmen 1. Von Unternehmen 2 geht also ein negativer externer Effekt in Bezug auf das Unternehmen 1 aus. Andererseits wird der Gewinn von Unternehmen 2 durch Unternehmen 1 positiv beeinflusst, der Term $+y_1y_2$ in der Gewinnfunktion von Unternehmen 2. Von Unternehmen 1 geht also ein positiver externer Effekt in Bezug auf das Unternehmen 2 aus. Der externe Effekt ist somit wechselseitig. **(3 Punkte)**
- Die Gewinnmaximierungsbedingung für Unternehmen 1 lautet

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_1} = \frac{\partial (5y_1 - y_1^2 - y_1y_2)}{\partial y_1} = 5 - 2y_1^* - y_2^* \stackrel{!}{=} 0$$

und die von Unternehmen 2

$$\frac{\partial G_2}{\partial y_2} = \frac{\partial (5y_2 - y_2^2 + y_1y_2)}{\partial y_2} = 5 - 2y_2^* + y_1^* \stackrel{!}{=} 0.$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt die Mengen

$$y_1^* = 1 \quad \text{und} \quad y_2^* = 3.$$

Damit erhält man die Gewinne

$$\begin{aligned} G_1^* &= G_1(y_1^*, y_2^*) = 5 \cdot 1 - 1^2 - 1 \cdot 3 = 1, \\ G_2^* &= G_2(y_1^*, y_2^*) = 5 \cdot 3 - 3^2 + 1 \cdot 3 = 9. \end{aligned}$$

(c) Die Unternehmen maximieren nun den Gesamtgewinn

$$\begin{aligned} G(y_1, y_2) &= G_1(y_1, y_2) + G_2(y_1, y_2) \\ &= 5y_1 - y_1^2 - y_1y_2 + 5y_2 - y_2^2 + y_1y_2 \\ &= 5y_1 - y_1^2 + 5y_2 - y_2^2 \end{aligned}$$

Auflösen der Maximierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_1} &= \frac{\partial (5y_1 - y_1^2 + 5y_2 - y_2^2)}{\partial y_1} = 5 - 2y_1^F \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y_2} &= \frac{\partial (5y_1 - y_1^2 + 5y_2 - y_2^2)}{\partial y_2} = 5 - 2y_2^F \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

ergibt

$$y_1^F = \frac{5}{2} \quad \text{und} \quad y_2^F = \frac{5}{2}$$

und damit den Gesamtgewinn

$$G^F = G(y_1^F, y_2^F) = 5 \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$