Aufgabe 1 (12 Punkte)
Horsts Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2.$$

Dabei steht x_1 für die von ihm konsumierte Menge von Gut 1 und x_2 für die von ihm konsumierte Menge von Gut 2. Der Preis einer Einheit von Gut 1 beträgt $p_1 > 0$ und der Preis einer Einheit von Gut 2 genau 2 Geldeinheiten. Horst besitzt 8 Geldeinheiten.

a) Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution! Wie ändert sich diese mit steigendem x_1?

b) Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum! *Hinweis: Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor!*

c) Zeichnen Sie die Nachfragekurve für Gut 1!

Lösung

a) Die Grenzrate der Substitution beträgt:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{2x_1}{8x_2} = \frac{x_1}{4x_2}.$$

Entlang einer Indifferenzkurve nimmt x_2 mit steigendem x_1 ab. Eine Senkung von x_2 und ein Anstieg von x_1 führen zu einem Anstieg von MRS. Aufgrund dessen sind Horsts Präferenzen konkav.

b) Da Horsts Präferenzen konkav sind, kommt nur ein Randoptimum als Lösung in Frage. Konsumiert Horst nur Gut 1, kann er maximal $\frac{8}{p_1}$ Einheiten von Gut 1 konsumieren. Konsumiert Horst nur Gut 2, kann er maximal 4 Einheiten von Gut 2 konsumieren. Horsts Nutzen beträgt entweder

$$U\left(\frac{8}{p_1}, 0\right) = \left[\frac{8}{p_1}\right]^2$$

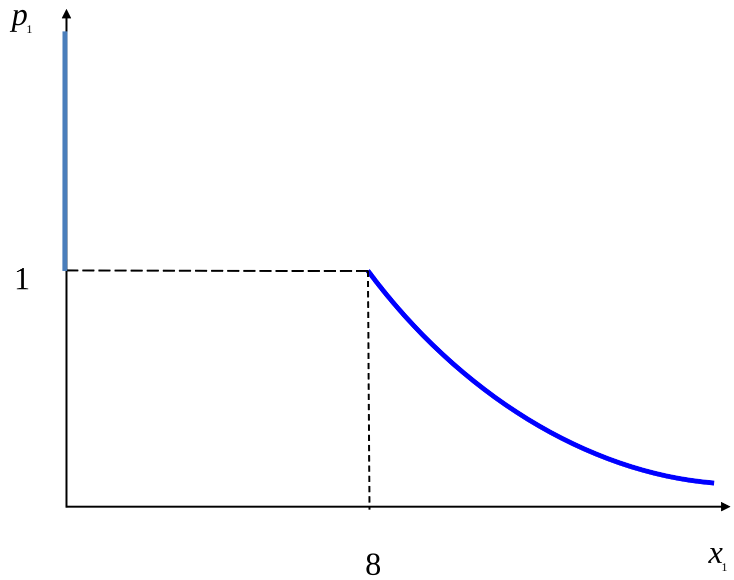
oder

$$U(0, 4) = 64.$$

Demnach konsumiert Horst nur Gut 1, wenn gilt (es sind nur positive Mengen möglich):

$$\begin{aligned} \left[\frac{8}{p_1}\right]^2 &> 64 \\ \frac{8}{p_1} &> 8 \\ p_1 &< 1 \end{aligned}$$

Demnach ist $\left(\frac{8}{p_1}, 0\right)$ das Haushaltsoptimum für $p_1 < 1$. Für $p_1 = 1$ gibt es zwei Haushaltsoptima $\left(\frac{8}{p_1}, 0\right)$ und $(0, 4)$. Für $p_1 > 1$ lautet das Haushaltsoptimum $(0, 4)$.



Aufgabe 2 (12 Punkte)
Erik muss sein Taschengeld von 32 auf die beiden Güter Schokolade und Lakritzstangen aufteilen. Der Preis für eine Tafel Schokolade betrage zunächst $p_S = 1$, der für eine Stange Lakritz $p_L = 1$. Eriks Nutzenfunktion sei $U(S, L) = S^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{6}}$.

(a) Berechnen Sie die optimalen Mengen an Süßigkeiten!

(b) Der Staat bemüht sich um eine gesündere Jugend und erhöht den Preis für Schokolade auf 2 Euro. Beschreiben Sie grafisch die Veränderung zum neuen optimalen Konsumbündel! Zeichnen Sie insbesondere den Einkommens- und den Substitutionseffekt für Schokolade ein! *Hinweis: Nutzen Sie, dass für Preise $p_S = 2$ und $p_L = 1$ und bei einem Budget von 56 das optimale Konsumbündel $(21, 14)$ beträgt!*

Lösungsvorschlag:

(a) Variante a)

Nutzenfunktion ist äquivalent zu $U(S, L) = S^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}$

$$L^* = \frac{1}{4}\frac{m}{1} = 8$$
$$S^* = \frac{3}{4}\frac{m}{1} = 24$$

Variante b)

$$MRS = \frac{\frac{1}{2}S^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{6}S^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}}} = 3\frac{L}{S} \stackrel{!}{=} MOC = \frac{1}{1}$$
$$L = \frac{1}{3}S$$

Eingesetzt in die Budgetbedingung:

$$
\begin{aligned}
S + \frac{1}{3}S &= 32 \\
S + \frac{1}{3}S &= 32 \\
S^* &= 24 \\
L^* &= 8
\end{aligned}
$$

(b) Budget, falls man sich altes Optimum leisten will:

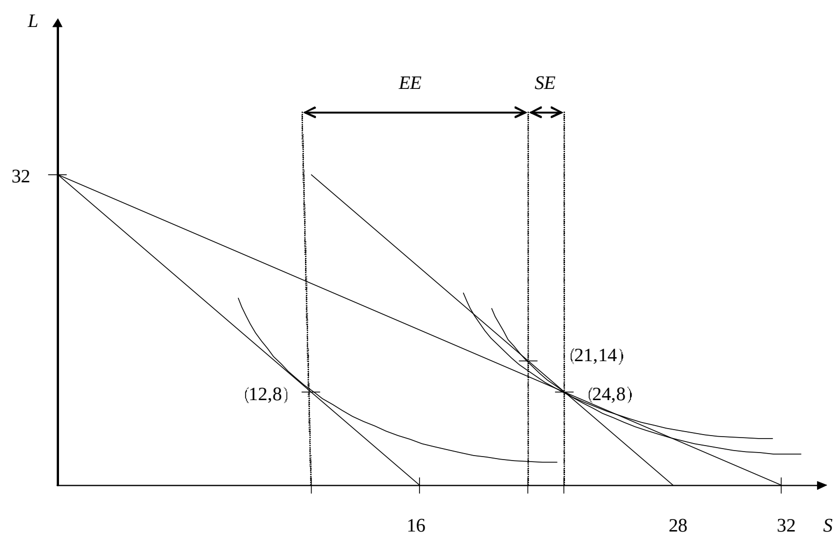
$$
\begin{aligned}
m_{sub} &= 2 \cdot 24 + 1 \cdot 8 \\
&= 56
\end{aligned}
$$

Zur grafischen Lösung wurde damit das Hilfsoptimum gegeben $(S^H, L^H) = (21, 14)$, womit bereits der Substitutionseffekt bereits eingezeichnet werden kann.

Nun wird das Optimum mit neuen Preisen aber altem Budget bestimmt:

$$
\begin{aligned}
S^{neu,*} &= \frac{3}{4}\frac{m}{2} = 12 \\
L^{neu,*} &= \frac{1}{4}\frac{m}{1} = 8
\end{aligned}
$$

Zeichnung:



Aufgabe 3 (7 Punkte)

(a) In einer Welt mit den beiden Gütern Gut 1 und Gut 2 gibt es zwei Güterbündel:

$$\begin{aligned} \text{Bündel } A &: \quad x_1^A = 4, x_2^A = 9; \\ \text{Bündel } B &: \quad x_1^B = 5, x_2^B = 3. \end{aligned}$$

Die Preise der Güter sind $p_1 = 1$ und $p_2 = 3$. Einem Agenten steht ein Budget in Höhe von 30 Geldeinheiten zur Verfügung. Die Präferenzen werden durch die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ repräsentiert.

Welches Güterbündel **präferiert** der Haushalt?

(b) Kreuzen Sie an! *Hinweis: Es ist jeweils eine Antwort korrekt.´*

In welcher Einheit wird die Konsumentenrente gemessen?

Gramm	o
Nutzeneinheiten	o
Geldeinheiten/Mengeneinheit	o
Geldeinheiten	o

Welche Formel zum Berechnen der Produzentenrente PR ist korrekt ?

$PR = E - C$	o
$PR = E - C_{Fix}$	o
$PR = E - C_{var}$	o

Wo liegt eine äquivalente Variation vor?

Welche Mindestsumme verlangen Sie dafür, dass die Verbesserung nicht eintritt?	o
Was verlangen Sie mindestens als Entschädigung für eine Verschlechterung?	o

Lösungsvorschlag

(a)

$$\begin{aligned} u(4,9) &= 17 \\ u(5,3) &= 13 \\ 17 &> 13 \end{aligned}$$

Er präferiert GB A.

(b) Richtige Antworten:

Geldeinheiten

$PR = E - C_{var}$

Welche Mindestsumme verlangen Sie dafür, dass die Verbesserung nicht eintritt?

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{3}{5}} \cdot x_2^{\frac{1}{3}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Grenzproduktivität des zweiten Produktionsfaktors!

(b) Bestimmen Sie die Produktionselastizität des zweiten Produktionsfaktors!

Lösungsvorschlag:

(a) Die Grenzproduktivität des zweiten Produktionsfaktors ist die partielle Ableitung der Produktionsfunktion nach diesem Faktor:

$$MP_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{3} x_1^{\frac{3}{5}} x_2^{-\frac{2}{3}}.$$

(b) Nach entsprechender Definition ist die Produktionselastizität wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{y,x_2} &= \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} \\
&= MP_2 \cdot \frac{x_2}{x_1^{\frac{3}{5}} \cdot x_2^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{\frac{1}{3} x_1^{\frac{3}{5}} x_2^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2}{x_1^{\frac{3}{5}} \cdot x_2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Ein (gewinnmaximierender) Monopsonist produziert gemäß der Produktionsfunktion:

$$y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot x.$$

Dabei bezeichnet y die beim Einsatz von x Einheiten des Produktionsfaktors erstellte Ausbringungsmenge. Die inverse Angebotsfunktion des Produktionsfaktors lautet:

$$w(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 1.$$

$w(x)$ steht für den Faktorpreis, der beim Einsatz von x Einheiten des Produktionsfaktors zu entrichten ist. Der Preis für das Produkt auf dem Absatzmarkt wird durch den Monopsonisten nicht beeinflusst und beträgt 12.
Bestimmen Sie die optimale Einsatzmenge des Produktionsfaktors und den Preis, den der Monopsonist dabei für diesen entrichtet!
Lösungsvorschlag:
Variante 1:
Die Gewinnfunktion des Monopsonisten lautet:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= p \cdot f(x) - x \cdot w(x) \\
&= 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot x - x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x + 1\right) \\
&= 3 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^2 - x
\end{aligned}$$

Diese Funktion maximiert der Monopsonist, indem er die optimale Einsatzmenge des Produktionsfaktors bestimmt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dx} &= 2 - \frac{2}{3}x \stackrel{!}{=} 0 \\
x &= 3.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die inverse Angebotsfunktion ergibt sich der Preis, den der Monopsonist für den Produktionsfaktor entrichtet:

$$w(3) = \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 = 2.$$

Variante 2:
Im Gewinnoptimum gilt:

$$\begin{aligned}
MR \cdot MP_x &\stackrel{!}{=} MC_x \\
p \cdot MP_x &\stackrel{!}{=} MC_x \\
12 \cdot \frac{1}{4} &= \frac{2}{3}x + 1 \\
x &= 3 \\
w(3) &= \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion

$$y = f(x) = x^2.$$

Bestimmen Sie die Grenzkosten des Unternehmens!
Lösungsvorschlag
Man bestimmt die Kostenfunktion mittels $x(y) = \sqrt{y}$ und

$$\begin{aligned} C(y) &= w_1 \cdot x_1 \\ &= w_1 \cdot \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Ableiten gibt die Grenzkostenfunktion

$$MC = C'(y) = \frac{1}{2} w_1 \cdot y^{-\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	c	$(7, 6)$	$(2, 5)$
	d	$(4, 0)$	$(1, 3)$

(a) Ist für den Zeilenwähler Strategie c eine dominante Strategie? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

(b) Ist die Strategiekombination $(c; b)$ ein Nash-Gleichgewicht? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

Lösungsvorschlag

(a) Ja, da $7 > 4$ und $2 > 1$.

(b) Nein, da $5 < 6$ (die Angabe $2 > 1$ ist nicht relevant im engsten Sinne).

Aufgabe 8 (7 Punkte)
Zwei Unternehmen sind die einzigen Produzenten auf einem Markt mit der inversen Nachfragekurve $p(Y) = 60 - 5Y$. Die Kostenfunktion für das erste Unternehmen sei gegeben durch $C_1(y_1) = 15y_1^2$, die Kostenfunktion des anderen Unternehmens sei gegeben durch $C_2(y_2) = 10y_2^2$.

(a) Berechnen Sie die Reaktionsfunktion von Unternehmen 1 im simultanen Mengenwettbewerb!

(b) Angenommen das zweite Unternehmen würde den Markt verlassen. Wie hoch wäre nun die Produktion des ersten Unternehmens? *Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe a)*

Lösungsvorschlag:

(a) Gewinnfunktion aufstellen

$$\pi_1(y_1, y_2) = 60y_1 - 5(y_1 + y_2)y_1 - 15y_1^2$$

Partielle Ableitung bilden und Nullsetzen

$$\frac{\partial \pi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} = 60 - 10y_1 - 5y_2 - 30y_1 \stackrel{!}{=} 0$$

Auflösen und Reaktionsfunktion bestimmen

$$\begin{aligned} 40y_1 &= 60 - 5y_2 \\ y_1^R(y_2) &= \frac{3}{2} - \frac{y_2}{8} \end{aligned}$$

(b) **Variante 1:**

Falls das zweite Unternehmen den Markt verlässt, dann ist $y_2 = 0$ zu wählen und in die Reaktionsfunktion einzusetzen. Unternehmen 1 bietet demnach $y_1 = \frac{3}{2}$ Einheiten an.

Variante 2:

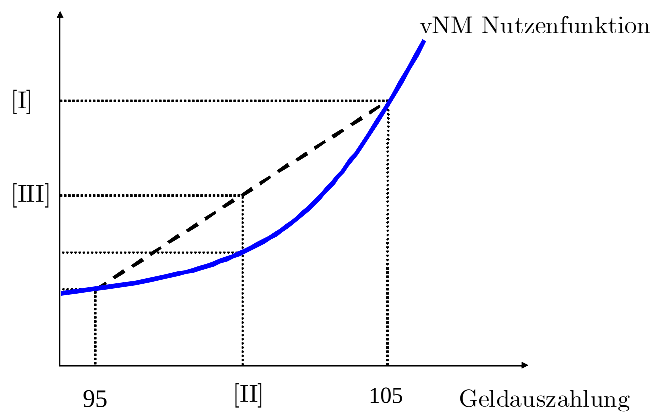
Falls das zweite Unternehmen den Markt verlässt, ist dies gleichbedeutend, dass Unternehmen 1 Monopolist auf dem Markt ist. Entsprechend lautet die Gewinnfunktion:

$$\pi_1(y_1, y_2) = 60y_1 - 5y_1^2 - 15y_1^2$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1(y_1)}{dy_1} &= 60 - 40y_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ y_1 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (12 Punkte)
Gegeben sei die Lotterie $\left[95, 105; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Betrachten Sie zur Analyse der Lotterie die folgende Abbildung:



(a) Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Die dargestellte vNM-Nutzenfunktion gibt Risikoaversion wieder.		
Die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$ gibt Risikoaversion wieder.		
Die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = x^2$ gibt Risikofreude wieder.		
Die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = 2x^2 + 4$ gibt Risikoaversion wieder.		

(b) Ordnen Sie für die oben dargestellte vNM-Nutzenfunktion korrekt zu, indem Sie in jeder Spalte (nicht Zeile!) ein Kreuz setzen!

	[I]	[II]	[III]
$CE(L)$			
$E(L)$			
$u(105)$			
$u(95)$			
$u(E(L))$			
$E_u(L)$			

(c) Nehmen Sie nun die vNM-Nutzenfunktion

$$u(x) = ax^2 + c, \ a > 0$$

an und bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent der Lotterie $\left[2, 3; \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right]$!

Lösungsvorschlag

(a)

	wahr	falsch
Die dargestellte vNM-Nutzenfunktion gibt Risikoaversion wieder.		x
Die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$ gibt Risikoaversion wieder.	x	
Die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = x^2$ gibt Risikofreude wieder.	x	
Die vNM-Nutzenfunktion $u(x) = 2x^2 + 4$ gibt Risikoaversion wieder.		x

(b)

	[I]	[II]	[III]
$CE(L)$			
$E(L)$		x	
$u(105)$	x		
$u(95)$			
$u(E(L))$			
$E_u(L)$			x

(c) Zunächst gilt

$$\begin{aligned} E_u(L) &= \frac{4}{5}u(2) + \frac{1}{5}u(3) \\ &= \frac{4}{5}\left(a2^2 + c\right) + \frac{1}{5}\left(a3^2 + c\right) \\ &= a5 + c, \end{aligned}$$

also ist wegen

$$E_u(L) = u(CE(L)) = a(CE(L))^2 + c$$

$$CE(L) = \sqrt{5}.$$

Aufgabe 10 (8 Punkte)
In einem Gutshaus gibt es sechs Wohnungen, die jeweils von einer Person bewohnt werden. Um den Zufahrtsweg zum Gutshaus zu verschönern, überlegen sich die Mieter eine Allee zu errichten. Alle Mieter haben die gleiche Präferenzordnung bezüglich des Einpflanzens von Bäumen am Zufahrtsweg und einem privaten Gut. Die Präferenzordnung eines einzelnen Mieters i kann durch die Nutzenfunktion $U(X_i, B) = X_i + \sqrt{B}$ dargestellt werden, wobei X_i die Mengen des privaten Gutes und B die Anzahl an Bäumen ist. Der Preis des privaten Gutes beträgt 100 und der Preis eines Baumes 50.

Wie viele Bäume sollten gepflanzt werden?

Lösung

Es handelt sich um konvexe Präferenzen der Mieter, deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} MRS_i \overset{!}{=} MOC &= \frac{50}{100} \\
MRS_i &= \frac{MU_B}{MU_{X_i}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{B}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{B}} \\
\frac{6}{2\sqrt{B}} &= \frac{50}{100} \\
\sqrt{B} &= \frac{600}{100} \\
B &= 36.
\end{aligned}$$