Aufgabe 1 (6 Punkte)
Konsument Steffen hat Präferenzen, die durch die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$ repräsentiert werden. Sein Einkommen beträgt 10 und die Preise betragen $p_1 = 1$ und $p_2 = 2$. Der Staat bietet eine Stücksubvention für das erste Gut in Höhe von $t \geq 0$ und erhebt eine Kopfsteuer in Höhe von $K \geq 0$. Im Fall der Abwesenheit von Kopfsteuer und Subvention, d.h. $t = K = 0$, ergibt sich aufgrund der Cobb-Douglas-Nutzenfunktion das Haushaltsoptimum

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{m}{p_1} \text{ und } x_2 = \frac{1}{2}\frac{m}{p_2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Höhe der Kopfsteuer K, so dass Steffen gerade 2 Einheiten vom zweiten Gut kauft!

(b) Gehen Sie nun von $K = 2$ aus. Bestimmen Sie die Höhe der Stücksubvention t, so dass Steffen ein Güterbündel mit einem Warenwert (bewertet mit Marktpreisen) in Höhe von 12 konsumiert!

Lösungsvorschlag:

(a) Bei einer Kopfsteuer in Höhe von K bleibt Steffen eine Konsumsumme in Höhe von $m - K$. Aus

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{m-K}{p_2} = 2$$

folgt

$$K = 2.$$

(b) Bei einer Stücksubvention in Höhe von t beträgt der 'effektive' Preis des ersten Gutes $p_1 - t$. Die Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{m-K}{(p_1-t)}p_1 + \frac{1}{2}\frac{m-K}{p_2}p_2 = 12$$

hat die Lösung

$$t = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Berechnen Sie den Erwartungswert der Lotterie $\left[9, 3; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$!

Lösungsvorschlag:

$$9 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Dieser Aufgabe liegt das Modell zur Freizeitnachfrage und Realkonsum (mit der Budgetgleichung $w \cdot 24 + p \cdot C_u = p \cdot C + w \cdot F$) zu Grunde. Beantworten Sie mit 'wahr' oder 'falsch'! *Kreuzen Sie an!*

wahr	falsch	Aussage
		Die Anfangsausstattung beträgt 24 Stunden.
		Wenn F ein gewöhnliches Gut ist, so steigt mit dem Lohn w auch die Anzahl der Stunden, die der Agent arbeiten möchte.
		Falls F ein normales Gut ist, so ist es auch gewöhnlich.

Lösungsvorschlag:

wahr	falsch	Anmerkung
	X	Die Anfangsausstattung ist $(24, C_u)$.
X		Wenn F ein gewöhnliches Gut ist, so sinkt mit steigendem Lohn w die Anzahl der Stunden, die das Individuum für F aufbringen, also *nicht* arbeiten möchte.
	X	Falls F ein normales Gut ist, so wirken Substitutions- und Einkommenseffekt (Nettoangebieter bei Anfangsausstattung) entgegen. Der Gesamteffekt ist unklar.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Ein Unternehmen hat die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + \sqrt{x_2}$ und agiert sowohl auf dem Outputmarkt als auch auf den Faktormärkten als Preisnehmer. Der Outputpreis beträgt 4, die Faktorpreise betragen $w_1 = 10$ und $w_2 > 0$.

(a) Bestimmen Sie den Grenzgewinn des ersten Produktionsfaktors. Wie viele Einheiten des ersten Produktionsfaktors wird das Unternehmen einsetzen?

(b) Bestimmen Sie die Faktornachfragefunktion für den zweiten Produktionsfaktor!

Lösungsvorschlag:

(a) Die Gewinnfunktion des Unternehmens ist

$$\pi\left(x_1, x_2\right) = 4\left(2 \cdot x_1 + \sqrt{x_2}\right) - 10 \cdot x_1 - w_2 \cdot x_2.$$

Da der Grenzgewinn des ersten Faktors negativ ist,

$$\frac{\partial \pi\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} = 8 - 10 < 0,$$

setzt ein gewinnmaximierendes Unternehmen den Faktor nicht ein, $x_1 = 0$.

(b) Aus

$$\frac{\partial \pi\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} = 4\frac{1}{2\sqrt{x_2}} - w_2 = 0$$

folgt die Faktornachfragefunktion

$$x_2 = \frac{4}{\left(w_2\right)^2}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Es sind 10 Flaschen Limonade auf Emily, Leonie, Moritz und Tim aufzuteilen. Den Nutzen, den sie für l Flachen bekommen, können Sie folgender Tabelle entnehmen.

	Emily	Leonie	Moritz	Tim
Nutzen durch l Flaschen	l	l	l	$0 \cdot l$

Betrachten Sie nun folgende Allokationen (eine Allokation ordnet jedem Akteur eine Anzahl an Flaschen zu, wobei die Summe der verteilten Flaschen nicht größer als 10 ist):

Allokation	Emily	Leonie	Moritz	Tim
A	2	4	4	0
B	1	5	3	1
C	5	5	0	0
D	1	4	3	0

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? *Kreuzen Sie an!*

wahr	falsch	Aussage
		Allokation B ist eine Pareto-Verbesserung gegenüber Allokation D.
		Allokation B ist pareto-optimal.
		Allokation C ist pareto-optimal.

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>wahr</th><th>falsch</th><th>Anmerkung</th></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td>Bei Allokation B wird gegenüber Allokation A keiner wird schlechter und Leonie besser gestellt.</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td><td>Zum Beispiel ist Allokation B’ eine Pareto-Verbesserung gegenüber Allokation B:
<table>
<tr><th>Allokation</th><th>Emily</th><th>Leonie</th><th>Moritz</th><th>Tim</th></tr>
<tr><td>B’</td><td>1</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td>Allokation C ist pareto-optimal.</td></tr>
</table>

Aufgabe 6 (15 Punkte)
In einer Tauschökonomie hat Agent A die Nutzenfunktion

$$u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \min\left\{x_1^A, 2 \cdot x_2^A\right\}$$

und Agent B hat die Nutzenfunktion

$$u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = x_1^B + x_2^B.$$

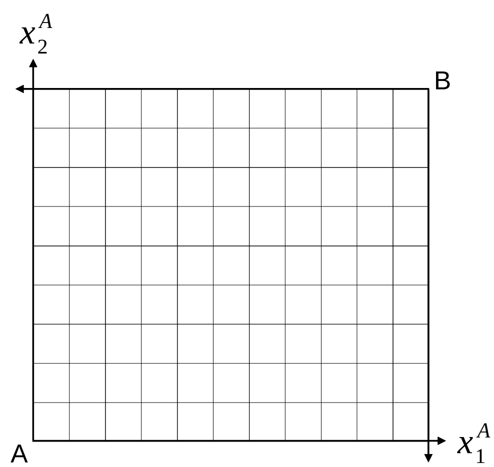
Die Anfangsausstattungen sind gegeben mit $\omega^A = (4, 8)$ und $\omega^B = (7, 1)$.

(a) Zeichnen Sie die Tausch-Edgeworth-Box zu dieser Situation möglichst exakt in das beigefügte Raster ein! Ihre Zeichnung sollte zumindest folgende Objekte abbilden *(Beschriften Sie die eingezeichneten Objekte hinlänglich!)*:

- die Anfangsausstattung der beiden Akteure,
- die Indifferenzkurze für jeden Akteur, die jeweils durch ω verläuft,
- die Bessermenge von Agent A ausgehend von ω (das ist die Menge aller Punkte $\left(x_1^A, x_2^A\right)$, für die $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) \geq u^A\left(\omega_1^A, \omega_2^A\right)$ gilt)!

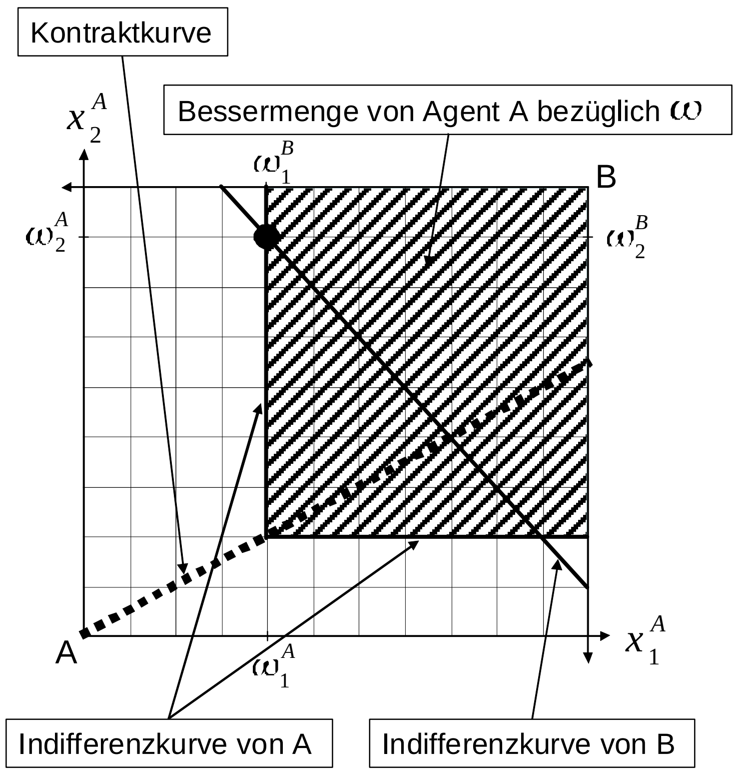
(b) Bestimmen Sie das höchste Nutzenniveau, das Agent B durch freiwilligen Tausch mit Agent A in dieser Situation erreichen kann.

(c) Zeichnen Sie die Kontraktkurve ein.



Lösungsvorschlag:

(a) Zu der Bessermenge von A gehören auch die Punkte auf der Indifferenzkurve.



(b) Damit A freiwillig tauscht, darf der Nutzen nicht unter den der Anfangsausstattung fallen. Es können also nur Punkte aus der eingezeichneten Bessermenge in Frage kommen. Unter diesen zeichnet sich die linke untere Ecke als der für B beste Punkt aus. Dessen Koordinaten betragen $x_1^B = 7, x_2^B = 7$ und nutzt $u^B(7,7) = 7 + 7 = 14$. (In diesem Fall erhält A $x_1^A = 4, x_2^A = 2$ und bekommt den Nutzen $u^A(4,2) = \min\{4, 2 \cdot 2\} = 4$).

(c) Die Kontraktkurve entspricht der Menge aller pareto-optimalen Punkte. Teilaufgabe (b) legt die Vermutung nahe, dass es sich bei der Kontraktkurve um die Allokationen handelt, bei denen $x_1^A = 2 \cdot x_2^A$ (und natürlich $\omega = x^A + x^B$) gilt.
In der Tat lässt sich zu jedem Punkt, der nicht der Ecke einer Indifferenzkurve von A entspricht eine Pareto-Verbesserung finden. Dazu wandert

man (wie in (b)) entlang der Indifferenzkurve von A zum entsprechenden Eckpunkt. Dabei wird A nicht schlechter und B besser gestellt.

Ferner ist jeder Eckpunkt einer Indifferenzkurve von A pareto-optimal, d.h. es gibt zu keinem solchen Eckpunkt eine Pareto-Verbesserung: Nur die Allokationen in der Bessermenge von A bezüglich eines solchen Eckpunktes kommen als Kandidaten in Frage (die anderen Allokationen stellen A schlechter). Alle derartigen Punkte aus der Bessermenge stellen jedoch B schlechter als es der betrachtete Eckpunkt vermag. Somit gibt es zu einem Eckpunkt einer Indifferenzkurve von A keine andere Allokation, die weder A noch B schlechter stellt; mithin gibt es auch keine Pareto-Verbesserung. (Die Kontraktkurve ist in der obigen Abbildung gestrichelt eingezeichnet.)

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Ein Haushalt verfügt über das Einkommen $m = 12$. Seine Nutzenfunktion lautet $u(x_1, x_2) = x_1 + 4 \cdot x_2$. Es gelten die Preise $p_1 = 1$ und $p_2 = 2$.

(a) Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

(b) Der Preis des ersten Gutes erhöht sich auf 3. Welcher Geldbetrag muss dem Haushalt gezahlt werden, damit er nach der Preiserhöhung das gleiche Nutzenniveau erreicht wie zuvor? Wie nennt man eine solche Ausgleichszahlung?

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \frac{MU_1}{MU_2} = MRS;$$

die Budgetgerade hat einen steileren Anstieg als die Indifferenzkurven. Der Haushalt wird daher nur Gut 2 konsumieren; das Haushaltsoptimum lautet $x_1^* = 0$ und $x_2^* = \frac{m}{p_2} = \frac{12}{2} = 6$.

(b) Nach der Preiserhöhung gilt weiterhin

$$\frac{p_1}{p_2} > MRS,$$

d.h. der Haushalt wird, wie schon in Aufgabenteil (a), nur Gut 2 konsumieren; sein Haushaltsoptimum bleibt unverändert. Es muss ihm daher der Betrag $CV = 0$ gezahlt werden, um das Nutzenniveau von Aufgabenteil (a) zu erreichen.

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Auf einer Insel existieren 10 Menschen mit identischen Präferenzen. Es gibt dort nur ein privates und ein öffentliches Gut. Die Präferenzen einer typischen Person i werden durch die Nutzenfunktion $u_i(g, x_i) = g + 4 \cdot x_i$ beschrieben, wobei x_i die von i konsumierte Menge des privaten Gutes und g die Menge des öffentlichen Gutes bezeichnet. Der Preis des privaten Gutes beträgt $p_x = 1$ und der Preis des öffentlichen Gutes $p_g = 5$.
Ermitteln Sie die Pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes!

Lösungsvorschlag:
Für jedes Individuum i beträgt die Grenzrate der Substitution

$$MRS_i = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial g}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{1}{4}.$$

Die marginalen Opportunitätskosten des öffentlichen Gutes betragen

$$MOC = \frac{p_g}{p_x} = 5.$$

Da die aufsummierte Grenzrate der Substitution kleiner ist als die marginalen Opportunitätskosten des öffentlichen Gutes,

$$10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2} < 5,$$

beträgt die Pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes 0.

Aufgabe 9 (11 Punkte)
Auf einem Markt agieren zwei Unternehmen. Die Kostenfunktion von Unternehmen 1 sei

$$c_1(q_1) = 12 \cdot q_1.$$

Das zweite Unternehmen besitzt die Kostenfunktion

$$c_2(q_2) = 4 \cdot q_2^2.$$

Die inverse Marktnachfragefunktion ist mit

$$p(Q) = 16 - 4 \cdot Q$$

beschrieben, wobei Q gleich der Summe der ausgebrachten Mengen ist, d.h. $Q = q_1 + q_2$.
Bestimmen Sie die Reaktionsfunktionen der beiden Unternehmen und das Nash-Gleichgewicht im simulatenen Mengenwettbewerb!

Lösungsvorschlag:
Zunächst stellt man die beiden Gewinnfunktionen auf:

$$\begin{aligned}
\pi_1(q_1, q_2) &= p(q_1, q_2) \cdot q_1 - c_1(q_1) \\
&= [16 - 4(q_1 + q_2)] \cdot q_1 - 12q_1, \\
\pi_2(q_1, q_2) &= p(q_1, q_2) \cdot q_2 - c_2(q_2) \\
&= [16 - 4(q_1 + q_2)] \cdot q_2 - 4q_2^2.
\end{aligned}$$

Beide Unternehmen reagieren auf den Output des jeweils anderen Unternehmens indem sie ihren Gewinn durch Ausbringung der dann optimalen Menge maximieren. Man leitet den Gewinn demnach partiell nach der eigenen Ausbringungsmenge ab und erhält so die Optimalbedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= 16 - 8q_1 - 4q_2 - 12 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= 16 - 8q_2 - 4q_1 - 8q_2 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen umgestellt ergeben die Reaktionsfunktionen $q_1^R(q_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_2$ und $q_2^R(q_1) = 1 - \frac{1}{4}q_1$. Setzt man die beiden Gleichungen ineinander ein, so erhält man das Nash-Gleichgewicht:

$$q_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}q_1\right) = \frac{1}{8}q_1 \text{ impliziert } q_1^{NG} = 0 \text{ und mithin } q_2^{NG} = 1.$$

Aufgabe 10 (6 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	c	$(6, 5)$	$(1, 4)$
	d	$(3, -1)$	$(0, 2)$

Im Folgenden werden drei Aussagen zu diesem Spiel aufgeführt und zu jeder Aussage eine Begründung gegeben; dabei gehört Begründung (a) zur Aussage (a) usw. Geben Sie erstens an, ob die Aussage wahr oder falsch ist! Geben Sie zweitens an, ob die entsprechende Begründung korrekt oder inkorrekt (d.h. falsch oder unvollständig) ist! *Kreuzen Sie an!*

	Aussage	wahr	falsch
(a)	Spieler 2 hat keine dominante Strategie!		
(b)	(c, d) ist kein Nash-Gleichgewicht!		
(c)	(d, d) ist kein Nash-Gleichgewicht!		

	Begründung	korrekt	inkorrekt
(a)	Denn $5 > 4$ aber $2 > -1$.		
(b)	Denn $6 > 1$.		
(c)	Denn $1 > 0$.		

Lösungsvorschlag:

	Aussage	wahr	falsch
(a)	Spieler 2 hat keine dominante Strategie!	X	
(b)	(c, d) ist kein Nash-Gleichgewicht!	X	
(c)	(d, d) ist kein Nash-Gleichgewicht!	X	

	Begründung	korrekt	inkorrekt
(a)	Denn $5 > 4$ aber $2 > -1$.	X	
(b)	Denn $6 > 1$.		X
(c)	Denn $1 > 0$.	X	

Anmerkung zu (b): Die richtige Ungleichung wäre $5 > 4$.