Aufgabe 1 (6 Punkte)
Udo hat die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$. Es gelten die Preise $p_1 = p_2 = 1$. Udo besitzt die Anfangsausstattung $\omega_1 = \omega_2 = 2$. Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

Lösungsvorschlag:
Da

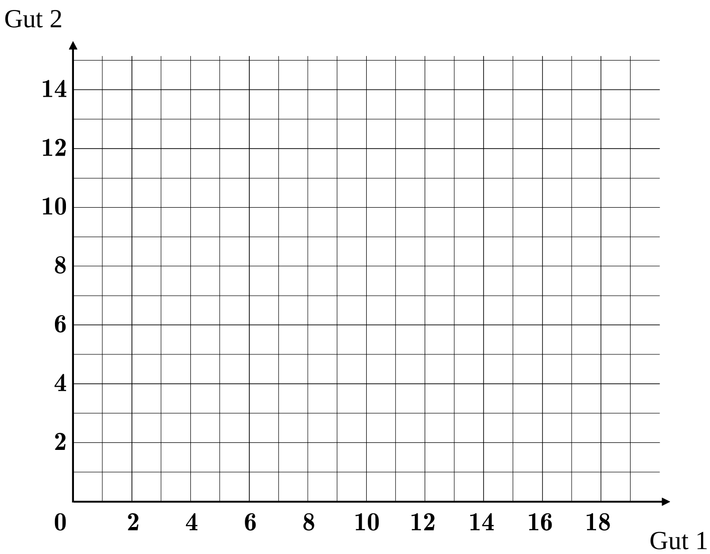
$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{1}{1} = 1 < 2 = \frac{2}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2},$$

wird Udo im Haushaltsoptimum nur Gut 2 konsumieren, d.h., $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\omega_1 \cdot p_1 + \omega_2 \cdot p_2}{p_2} = \frac{2+2}{1} = 4$.

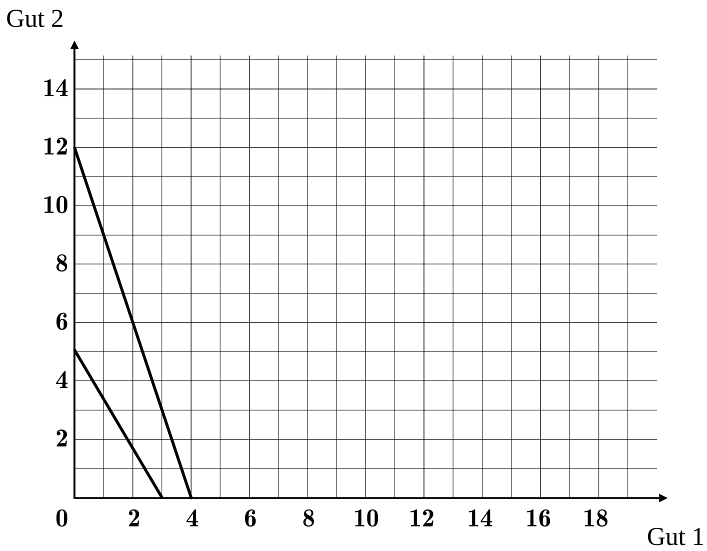
Aufgabe 2 (4 Punkte)
Stewart G. hat monotone Präferenzen. Welche Budgetsituation (A oder B), d.h. welche Kombination von p_1, p_2 und m, ist Stewart G. lieber, wenn er aus der entsprechenden Budgetmenge wählen soll?

Budgetsituation	A	B
p_1	5	3
p_2	3	1
m	15	12

Zeichnen Sie zur Beantwortung der Frage auch die zwei Budgetgeraden in das folgende Diagramm ein!



Lösungsvorschlag:
Stewart G. zieht die Budgetsituation B echt vor, da jedes Güterbündel (x_1, x_2), das er sich bei der Budgetsituation A leisten kann, auch bei Budgetsituation B wählbar ist und nicht auf der entsprechenden Budgetgerade liegt. Daraus können wir schließen, dass es auf der Budgetgerade des Budgets B ein Bündel (y_1, y_2) gibt, so dass $y_1 > x_1$ und $y_2 > x_2$ und mithin, aufgrund der monotonen Präferenzen, $(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$ gilt.


Gut 2
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Gut 1

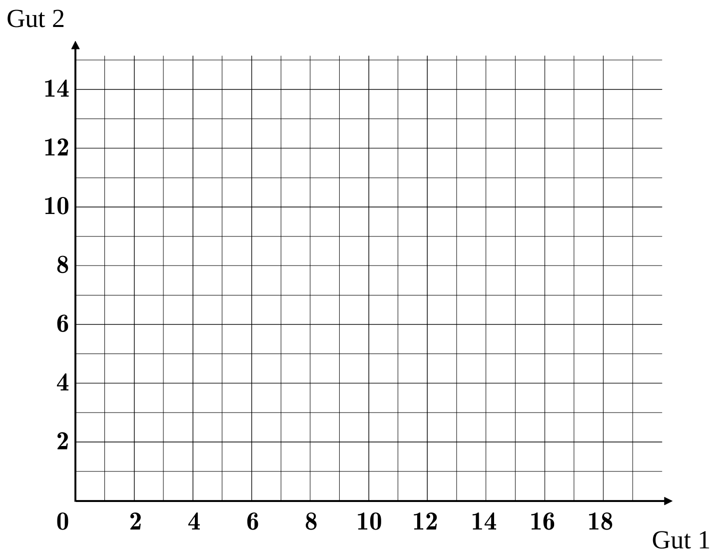
Aufgabe 3 (7 Punkte)
Jogi hat lexikographische Präferenzen, d.h. er zieht das Güterbündel (x_1, x_2) dem Bündel (y_1, y_2) genau dann echt vor, wenn es entweder mehr vom ersten Gut enthält oder gleich viel vom ersten Gut und echt mehr vom zweiten. Formal bedeutet das

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ oder } [x_1 = y_1 \text{ und } x_2 > y_2] .$$

Die Preise sind $p_1 = 5$ und $p_2 = 2$.

(a) Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum, wenn sein Einkommen gleich m ist.

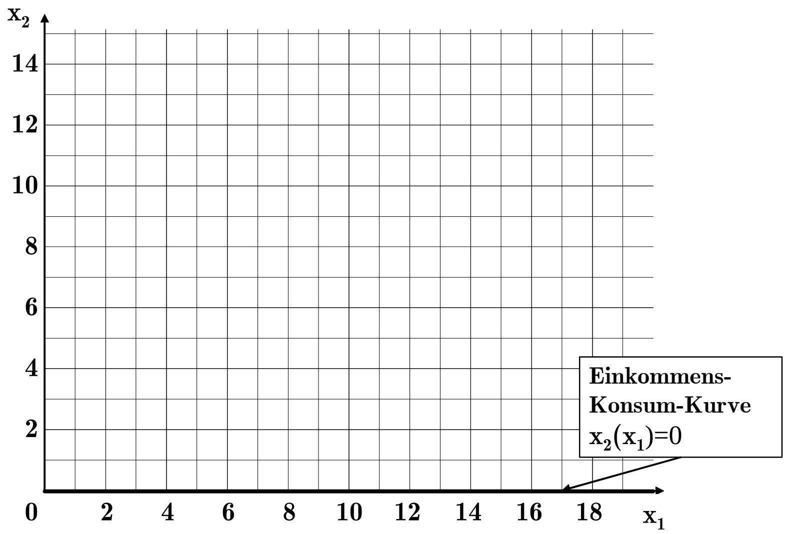
(b) Zeichnen Sie die Einkommens-Konsum-Kurve (die Menge der Haushaltsoptima bei variierendem Einkommen) in die folgende Abbildung ein!



Lösungsvorschlag:

(a) Bei lexikographischen Präferenzen ist es optimal nur das erste Gut zu konsumieren: Angenommen man würde $\overline{x}_2 > 0$ von Gut 2 konsumieren. Dann könnte man $\frac{m-p_2\overline{x}_2}{p1}$ für Gut 1 ausgeben. Jedoch wird $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$ dem Güterbündel $\left(\frac{m-p_2\overline{x}_2}{p1}, \overline{x}_2\right)$ echt vorgezogen, da $\frac{m}{p_1} > \frac{m-p_2\overline{x}_2}{p1}$ für $\overline{x}_2 > 0$. Also ergeben sich die Haushaltsoptima $x_1^* = \frac{m}{p_1}, x_2^* = 0$.

(b) Die Einkommens-Konsum-Kurve ist $x_2(x_1) = 0$ für alle $x_1 \geq 0$, da man durch Variation von m jedes x_1 im Haushaltsoptimum erreichen kann und bei keinem m das Gut 2 nachgefragt wird.



Aufgabe 4 (10 Punkte)
Ein Unternehmen hat die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Es hat keinen Einfluss auf die Faktorpreise w_1 und w_2 sowie den Güterpreis p, wobei alle Preise echt positiv sind, d.h., $p, w_1, w_2 > 0$. Kurzfristig muss das Unternehmen vom zweiten Faktor $x_2 = 5$ Einheiten einsetzen.

(a) Kann es für das Unternehmen optimal sein, kurzfristig mehr als 5 Einheiten des ersten Faktors einzusetzen? Begründen Sie!

(b) Bestimmen Sie die kurzfristige Faktornachfragefunktion für den ersten Produktionsfaktor!

Lösungsvorschlag:

(a) Nein, es kann kurzfristig nie optimal sein, mehr als 5 Einheiten des ersten Faktors einzusetzen, da dies marginale Kosten in Höhe von w_1 verursacht, ohne die Produktion, und damit ohne den Ertrag, zu steigern.

(b) Aus Teilaufgabe (a) wissen wir bereits, dass $x_1 \leq 5$. Da in diesem Bereich $f(x_1, 5) = x_1$ gilt, lautet die Gewinnfunktion

$$\Pi(x_1, 5) = p \cdot x_1 - w_1 \cdot x_1 - w_2 \cdot 5.$$

Differenzieren führt zu

$$\frac{d\Pi}{dx_1} = p - w_1.$$

Man kann nun sehen, dass die kurzfristige Faktornachfragefunktion

$$x_1(p, w_1, w_2 | x_2 = 5) = \begin{cases} 5, & p > w_1, \\ [0, 5], & p = w_1, \\ 0, & p < w_1, \end{cases}$$

lautet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Gegeben sei die Produktionsfunktion $y = f(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie das Grenzprodukt und die Produktionselastizität für den Produktionsfaktor!

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} MP &= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ \varepsilon_{y,x} &= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Akteur A hat Präferenzen auf Güterbündeln (x_1, x_2), die durch die Nutzenfunktion $u^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A$ abgebildet werden. Akteur B hat Präferenzen, die durch $u^B(x_1^B, x_2^B) = x_2^B$ repräsentiert werden. Akteur A hält die Anfangsausstattung $\omega_1^A = \omega_2^A = 5$, Akteur B hat die Anfangsausstattung $\omega_1^B = 4, \omega_2^B = 6$.

(a) Stellt Gut 2 für Akteur A ein neutrales Gut dar? *Kreuzen Sie an*!

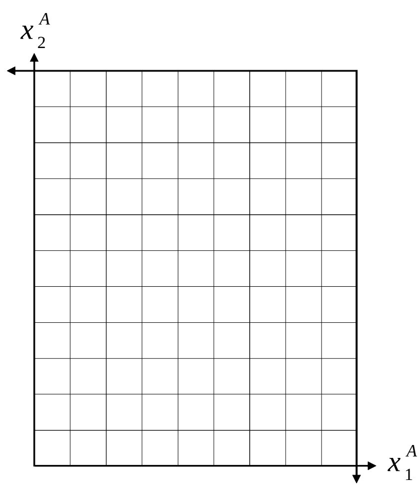
Ja	o
Nein	o

(b) Zeichnen Sie die Tausch-Edgeworth-Box zu dieser Situation möglichst exakt in das beigefügte Raster ein! Ihre Zeichnung sollte zumindest folgende Objekte abbilden (Beschriften Sie die eingezeichneten Objekt hinlänglich!):

- die Anfangsausstattung der beiden Akteure,
- die Indifferenzkurze für jeden Akteur, die jeweils durch den Punkt verläuft, der die Anfangsausstattung symbolisiert!

(c) Stellt die Allokation $x_1^A = 6$, $x_2^A = 0, x_1^B = 3$ und $x_2^B = 11$ eine Pareto-Verbesserung gegenüber der Anfangsausstattung dar? Begründen Sie!

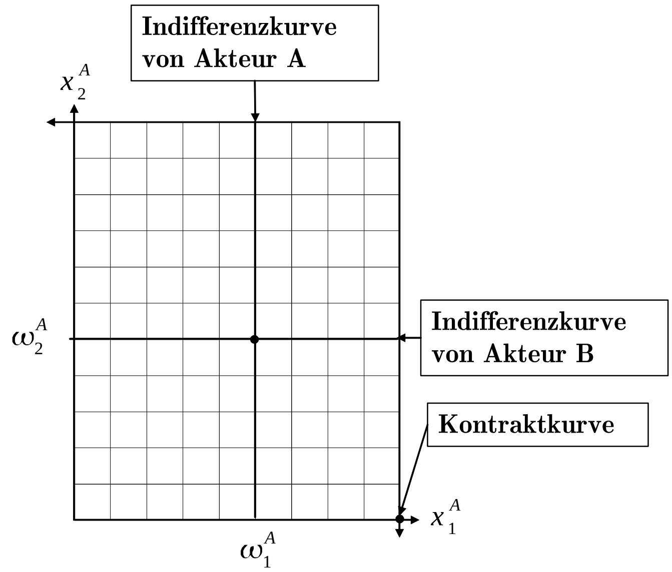
(d) Bestimmen Sie die Kontraktkurve und zeichnen Sie sie deutlich sichtbar in das Diagramm aus Teilaufgabe (b) ein!



Lösungsvorschlag:

(a) Ja, da $u^A(x_1^A, x_2^A + d) = u^A(x_1^A, x_2^A)$ für alle $d \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Vgl. die folgende Abbildung:



(c) Ja, weil sich beide Akteure besserstellen, $u^A(6, 0) = 6 > 5 = u^A(5, 5)$ sowie $u^B(3, 11) = 11 > 6 = u^B(4, 6)$.

(d) Die Kontraktkurve ist der Punkt $x_1^A = 9$, $x_2^A = 0, x_1^B = 0$ und $x_2^B = 11$, wie in der obigen Abbildung eingezeichnet. Eine Allokation liegt genau dann auf der Kontraktkurve, wenn sie pareto-optimal ist. Da der angegebene Punkt im Vergleich zu jeder anderen Allokation eine Pareto-Verbesserung darstellt und selbst pareto-optimal ist, liegt nur diese Allokation auf der Kontraktkurve.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Die inverse Nachfragefunktion auf einem Markt ist $p(y) = 10 - 2y$. Die inverse Angebotsfunktion auf dem Markt lautet $p(y) = y + 1$.

(a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge!

(b) Berechnen Sie die Konsumentenrente im Gleichgewicht!

(c) In welcher Einheit wird die Konsumentenrente gemessen? *Kreuzen Sie an*!

Gramm	o
Nutzeneinheiten	o
Kilometer	o
Geldeinheiten	o

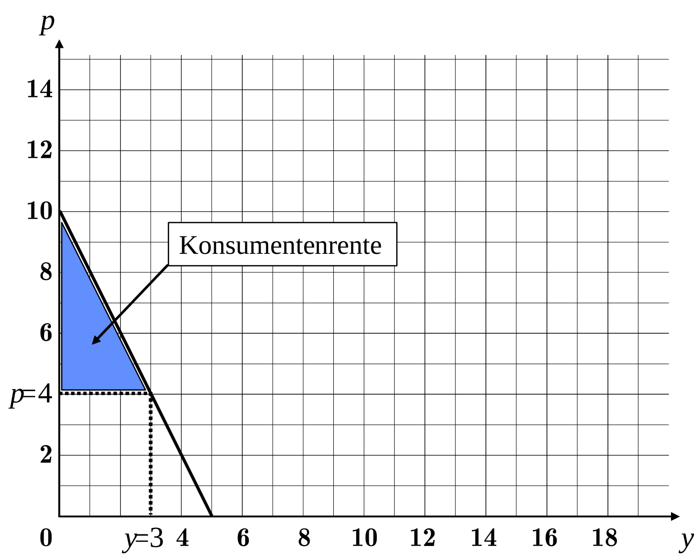
Lösungsvorschlag:

(a)

$$10 - 2y = 1 + y \Leftrightarrow y = 3 \text{ und } p(3) = 4.$$

(b)

$$KR = \frac{(10-4)\,3}{2} = 9.$$



(c) Die Konsumentenrente wird in Geldeinheiten gemessen.

Aufgabe 8 (7 Punkte)
Ein gewinnmaximierender Monopsonist produziert gemäß der Produktionsfunktion:

$$y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot x.$$

Die inverse Angebotsfunktion des Produktionsfaktors lautet:

$$w(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2.$$

Der Preis für das Produkt auf dem Absatzmarkt wird durch den Monopsonisten nicht beeinflusst und beträgt 16.
Bestimmen Sie die optimale Einsatzmenge des Produktionsfaktors und den Preis, den der Monopsonist dabei für diesen entrichtet!

Lösungsvorschlag:
Variante 1:
Die Gewinnfunktion des Monopsonisten lautet:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= p \cdot f(x) - x \cdot w(x) \\ &= 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot x - x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + 2 \right) \\ &= 4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x \end{aligned}$$

Diese Funktion maximiert der Monopsonist, indem er die optimale Einsatzmenge des Produktionsfaktors bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dx} &= 2 - x \stackrel{!}{=} 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die inverse Angebotsfunktion ergibt sich der Preis, den der Monopsonist für den Produktionsfaktor entrichtet:

$$w(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3.$$

Variante 2:
Im Gewinnoptimum gilt:

$$\begin{aligned} MR \cdot MP_x &\overset{!}{=} MC_x \\ p \cdot MP_x &\overset{!}{=} MC_x \\ 16 \cdot \frac{1}{4} &= x + 2 \\ x &= 2 \\ w\left(2\right) &= \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)
In der folgenden Matrix gibt der erste Eintrag einer jeden Zelle die jeweilige Auszahlung des Zeilenwählers und der zweite Eintrag die jeweilige Auszahlung des Spaltenwählers bei der entsprechenden Strategiekombination an. Wählt z.B. der Zeilenwähler Strategie u und der Spaltenwähler Strategie r, so bekommt der Zeilenwähler 5 und der Spaltenwähler 6.

	l	r
o	$(1,4)$	$(3,7)$
u	$(2,8)$	$(5,6)$

(a) Ist für den Zeilenwähler Strategie u eine dominante Strategie? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

(b) Ist die Strategiekombination (u, r) ein Nash-Gleichgewicht? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

Lösungsvorschlag:

(a) Für den Zeilenwähler ist Strategie u dominant, da $2 > 1$ und $5 > 3$.

(b) Die Strategiekombination (u, r) stellt kein Nash-Gleichgewicht dar. Der Spaltenwähler kann seine Auszahlung durch einseitiges Abweichen auf Strategie l verbessern, $8 < 6$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)
In unmittelbarer Nähe einer Brücke befindet sich ein Restaurant, dessen Gewinnfunktion vom Verkehr auf der Brücke abhängt:

$$\Pi^R(x,y) = 24y - \frac{1}{2}y^2 - xy.$$

Dabei steht y für die Anzahl der bedienten Gäste und x für die über die Brücke fahrenden Autos. Auf der Brücke ist eine Mautstation, so dass die Brückenbetreiber mit der Gewinnfunktion

$$\Pi^B(x) = 6x - \frac{1}{8}x^2$$

rechnen.

(a) Zeigen Sie, dass der Restaurantbetrieb im sozialen Optimum eingestellt wird, indem Sie die Aktivitätsniveaus nach einer Fusion berechnen!

(b) Bestätigen Sie, dass sich im Falle des Schadensrechts im Gleichgewicht dieselben Aktivitätsniveaus wie im sozialen Optimum einstellen!

Lösungsvorschlag:

(a) Zunächst stellen wir die gemeinsame Gewinnfunktion auf:

$$\begin{aligned}\Pi(x,y) &= \Pi^B(x) + \Pi^R(x,y)\\ &= 6x - \frac{1}{8}x^2 + 24y - \frac{1}{2}y^2 - xy\end{aligned}$$

Anwendung des Optimierungskalküls ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 6 - \frac{1}{4}x^\# - y^\# \stackrel{!}{=} 0,\\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= 24 - y^\# - x^\# \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Auflösen dieses Gleichungssystems ergibt $x^\# = 24$ sowie $y^\# = 0$.

(b) Wir wenden das Maximierungskalkül an und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi^B}{dx} &= 6 - \frac{1}{4}x^* \stackrel{!}{=} 0,\\ \frac{\partial \Pi^R}{\partial y} &= 24 - y^* - x^* \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Auflösen der ersten Gleichung ergibt $x^* = 24$, was eingesetzt in die zweite Gleichung $y^* = 0$ ergibt.

Aufgabe 11 (8 Punkte)
Uschi und Rainer leben zusammen in einer Zweier-WG. Uschis Zahlungsbereitschaft für Wärme (gemessen in $°C$) beträgt $\frac{1}{120}y$, die Rainers $\ln y$, wobei y die Temperatur in der Wohnung angibt. Ein $°C$ kostet konstant $\frac{1}{20}$ €.
Hinweis: Es sind hier die Zahlungsbereitschaften und nicht die marginalen Zahlungsbereitschaften gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Temperatur in der Wohnung!

(b) Uschi hat Mick kennengelernt und verlässt die Zweier-WG. Wie warm wird es in der Wohnung sein, wenn nur Rainer dort wohnt?

Lösungsvorschlag:

(a) Die aggregierte Zahlungsbereitschaft lautet $\frac{1}{120}y + \ln y$. Im Optimum entspricht die marginale Zahlungsbereitschaft gerade den Grenzkosten, d.h.
$$\frac{d\left(\frac{1}{120}y + \ln y\right)}{dy} = \frac{1}{120} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \Longleftrightarrow y = 24.$$

(b) Die aggregierte Zahlungsbereitschaft lautet $\ln y$. Im Optimum entspricht die marginale Zahlungsbereitschaft gerade den Grenzkosten, d.h.
$$\frac{d\left(\ln y\right)}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \Longleftrightarrow y = 20.$$