Aufgabe 1 (6 Punkte)
Ein Haushalt mit der Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ gibt sein gesamtes Einkommen $m = 16$ für die beiden Güter mit den Preisen $p_1 = 1$ und $p_2 = 4$ aus. Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

Lösungsvorschlag
Über den Ansatz

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2^*}{x_1^*}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_1^*}}}{\frac{2}{2\sqrt{x_2^*}}} = \frac{MU_1}{MU_2} \stackrel{!}{=} \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{4}$$

erhält man

$$x_2^* = \frac{1}{4} \cdot x_1^*.$$

Einsetzen in die Budgetgleichung

$$\begin{aligned} m &= p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \\ 16 &= 1 \cdot x_1^* + 4 \cdot \frac{1}{4} x_1^* \end{aligned}$$

und Auflösen ergibt

$$x_1^* = 8$$

sowie

$$x_2^* = \frac{1}{4} \cdot x_1^* = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Konsument Igors Präferenzen seien durch folgende Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = \max\{2x_1, 8x_2\}$ (**Maximum!**) repräsentiert.

(a) Welches der beiden Güterbündel, $(0, 2)$ oder $(4, 1)$, präferiert Igor?

(b) Zeichnen Sie die Indifferenzkurven zu diesen beiden Bündeln! (Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welche Punkte auf den Achsen zum Bündel $(4, 1)$ indifferent sind.)

(c) Igor hat ein Einkommen von 5 Geldeinheiten. Es gelten die Preise $p_1 = p_2 = 1$. Zeichnen Sie die Budgetgerade in das Indifferenzkurvendiagramm aus Aufgabenteil (b) ein. Welches Güterbündel wählt Igor im Haushaltsoptimum?

Lösungsvorschlag

(a) Es gilt
$$u(0, 2) = \max\{2 \cdot 0, 8 \cdot 2\} = \max\{0, 16\} = 16$$
sowie
$$u(4, 1) = \max\{2 \cdot 4, 8 \cdot 1\} = \max\{8, 8\} = 8.$$
Wegen $16 > 8$ zieht Igor das Bündel $(0, 2)$ dem Bündel $(4, 1)$ vor.

(b) Siehe Abbildung 0.1. Die Indifferenzkurven sind jeweils durch eine getrichelte Linie dargestellt.

(c) Die Budgetgerade finden Sie in Abbildung 0.1 als durchgezogene Linie. Ein Blick auf die Nutzenfunktion macht klar, dass Igor bei positiven Preisen nur ein Gut kaufen wird. Bei gleichen Preisen folgt also, dass nur die beiden Bündel $(5, 0)$ und $(0, 5)$ in Frage kommen. Da
$$u(5, 0) = \max\{2 \cdot 5, 8 \cdot 0\} = 10 < 40 = \max\{2 \cdot 0, 8 \cdot 5\} = u(0, 5),$$
wird Igor das Bündel $(0, 5)$ erwerben.

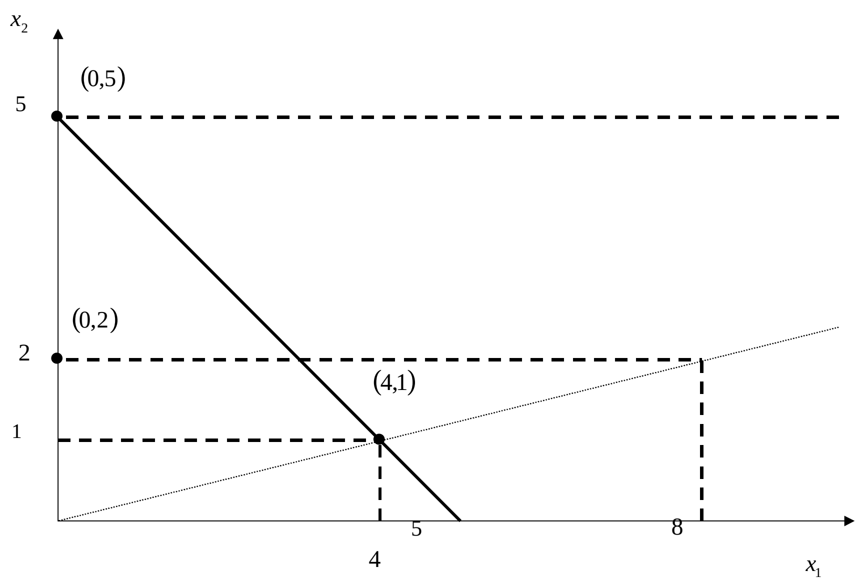

Abbildung 0.1: Indifferenzkurven und mehr ...

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Eine Firma kann in zwei Produktionsstätten, A und B, jeweils dasselbe Gut produzieren. In Produktionsstätte A steht ihr die Kostenfunktion $C_A(y_A) = 4y_A$, in Produktionsstätte B die Funktion $C_B(y_B) = \frac{y_B^2}{2}$ zur Verfügung.
Bestimmen Sie die Kostenfunktion für das Gesamtunternehmen! (Hinweis: Sie müssen bei $y = 4$ eine Fallunterscheidung vornehmen!)

Lösungsvorschlag

Zunächst ermitteln wir die Grenzkosten:

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dy_A} &= 4 \\ \frac{dC_B}{dy_B} &= y_B \end{aligned}$$

Man/frau erkennt, dass die Grenzkosten der ersten vier Einheiten in der Produktionsstätte B kleiner sind als in A. Solange also höchstens 4 Einheiten insgesamt hergestellt werden sollen, erfolgt dies in der Produktionsstätte B. Für weitere herzustellende Einheiten sind jedoch die Grenzkosten in Produktionsstätte A kleiner als in B. Alle weiteren Einheiten werden also in der Produktionsstätte A produziert. Insgesamt erhält man also

$$C(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2}, & y \leq 4, \\ \frac{4^2}{2} + 4(y-4), & y > 4, \end{cases} = \begin{cases} \frac{y^2}{2}, & y \leq 4, \\ 4y - 8, & y > 4. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Auf einem Markt mit vollkommener Konkurrenz bieten zwei Typen von Unternehmen, A und B, dasselbe Gut an. Die Unternehmen vom Typ A haben die Kostenfunktion $C_A(y_A) = 8y_A$, die Unternehmen vom Typ B die Kostenfunktion $C_B(y_B) = 6y_B$.
Welcher Preis stellt sich im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht ein?

Lösungsvorschlag
Wir ermitteln für jeden Unternehmenstyp das Minimum der Durchschnittskosten:

$$\begin{aligned} AC_A^{\min} &= \min_{0 \leq y_A} \frac{C_A(y_A)}{y_A} = \min \frac{8y_A}{y_A} = 8 \\ AC_B^{\min} &= \min_{0 \leq y_B} \frac{C_B(y_B)}{y_B} = \min_{0 \leq y_B} \frac{6y_B}{y_B} = 6 \end{aligned}$$

Im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht werden nur Unternehmen das Typs B anbieten und dies zum Minimum ihrer Durchschnittskosten,

$$p = AC^{\min} = AC_B^{\min} = 6.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Zeichnen Sie die inverse Nachfragefunktion $p(q) = 10 - 2q$. Berechnen Sie bei welchem Preis die Konsumenten $q = 2$ Einheiten nachfragen. Ermitteln Sie die Konsumentenrente bei diesem Preis!

Lösungsvorschlag
Die inverse Nachfragekurve finden Sie in der Abbildung 0.2. Durch Einsetzen in die inverse Nachfragefunktion erhält man $p(2) = 10 - 2 \cdot 2 = 6$. Die Konsumentenrente ist in der Graphik schraffiert und damit auch schon klar, dass sie mit der wohlbekannten Dreiecksflächenformel berechnet werden kann:

$$KR = \frac{(10-6) \cdot 2}{2} = 10 - 6 = 4.$$

Beachten Sie, dass wir dabei verwendet haben, dass der Prohibitivpreis, wie in der Graphik ersichtlich, gleich $p\,(0) = 10$ ist.

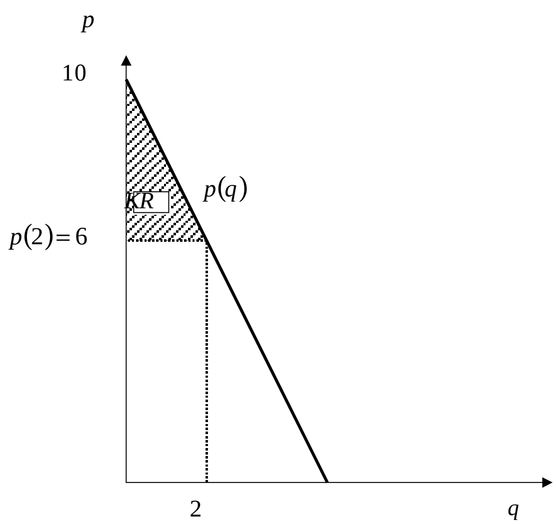

Abbildung 0.2: Konsumentenrente und mehr ...

Aufgabe 6 (3 Punkte)
In einer Volkswirtschaft werden zwei Güter, 1 und 2, hergestellt. Die Produktionsmöglichkeitenkurve lautet

$$x_2\left(x_1\right) = 100 - \frac{1}{5}x_1^2,$$

wobei x_2 für die von Gut 2 und x_1 für die von Gut 1 produzierte Menge steht. Von Gut 1 werden in der Volkswirtschaft 10 Einheiten gefertigt. Wenn die Produktion des ersten Gutes um eine (kleine) Einheit gesenkt wird, wie viele Einheiten von Gut 2 können dann zusätzlich hergestellt werden?

Lösungsvorschlag (a)
Wir leiten die Funktion $x_2(\cdot)$ nach x_1 ab und erhalten so die Grenzrate der Transformation:

$$MRT(x_1) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2}{5}x_1.$$

Einsetzen von $x_1 = 10$ ergibt

$$MRT(10) = -4.$$

Wenn also eine kleine Einheit von Gut 1 weniger produziert wird, können 4 (kleine) Einheiten von Gut 2 mehr hergestellt werden.

Lösungsvorschlag (b)
Wir untersuchen, wie sich die von Gut 2 produzierbare Menge verändert, wenn wir eine Einheit weniger als 10, also 9 Einheiten von Gut 1 herstellen. Mathematisch führt diese Überlegung auf die folgende Formelzeile:

$$x_2(9) - x_2(10) = (100 - \frac{1}{5} \cdot 9^2) - (100 - \frac{1}{5} \cdot 10^2) = \frac{19}{5} = 3,8.$$

Wenn also eine Einheit von Gut 1 weniger produziert wird, können $3,8$ Einheiten von Gut 2 mehr hergestellt werden.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Bimatrixspiel, in dem jeweils der linke Eintrag die Auszahlung des Zeilenwählers und der rechte Eintrag die Auszahlung des Spaltenwählers darstellt:

	s_1	s_2
z_1	$(2,2)$	$(4,1)$
z_2	$(a,4)$	$(5,b)$

(a) Für welche Parameter a ist z_2 eine dominante Strategie?

(b) Für welche Parameter b ist s_2 eine dominante Strategie?

(c) Für welche Parameter a, b ist (z_2, s_1) ein Nash-Gleichgewicht?

Lösungsvorschlag

(a) z_2 ist eine dominante Strategie, falls die Auszahlungen des Zeilenwählers unabhänging von der Entscheidung des Spaltenwählers größer sind als bei z_1, also falls

$$a > 2 \qquad \text{und} \qquad 5 > 4.$$

(b) s_2 ist eine dominante Strategie, falls die Auszahlungen des Spaltenwählers unabhänging von der Entscheidung des Zeilenwählers größer sind als bei s_1, also falls

$$1 > 2 \qquad \text{und} \qquad b > 4,$$

d.h. für keinen Parameterwert b.

(c) (z_2, s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht, falls keiner der beiden Spieler hiervon einseitig profitabel abweichen kann, also wenn:

$$\begin{aligned} \text{Zeilenwähler} &: \quad a \geq 2 \\ \text{Spaltenwähler} &: \quad 4 \geq b \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (11 Punkte)
Zwei Unternehmen, A und B, bieten auf einem Markt dasselbe Gut an. Dabei legen die Unternehmen simultan die produzierte und abzusetzende Menge fest.

Die Gesamtnachfrage auf diesem Markt ist durch die inverse Nachfragefunktion $p(y) = 24 - 2y$ gegeben, wobei die Menge y zum Preis von $p(y)$ abgesetzt werden kann. Die Kosten von Unternehmen A zur Produktion von y_A Einheiten dieses Gutes betragen $C_A(y_A) = 2 \cdot y_A^2$. Unternehmen B hat konstante Durchschnittskosten in Höhe von 4.

(a) Bestimmen Sie die Reaktionsfunktionen der beiden Unternehmen!

(b) Ermitteln Sie nun die im Cournot-Gleichgewicht angebotenen Mengen!

Lösungsvorschlag

(a) Wir beginnen mit Unternehmen A. Ausgehend von dessen Gewinnfunktion

$$\begin{aligned}\pi_A(y_A, y_B) &= p(y_A + y_B)\, y_A - C_A(y_A) \\ &= (24 - 2(y_A + y_B)) \cdot y_A - 2 \cdot y_A^2\end{aligned}$$

erhalten wir über die Maximierungsbedingung

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial y_A} = 24 - 4y_A - 2y_B - 4y_A = 0$$

die Reaktionsfunktion

$$y_A^R(y_B) = 3 - \frac{y_B}{4}.$$

Analog erhält man für Unternehmen B:

$$\begin{aligned}\pi_B(y_A, y_B) &= p(y_A + y_B)\, y_B - 4 \cdot y_B \\ &= (24 - 2(y_A + y_B))\, y_B - 4 \cdot y_B \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial y_B} &= -4y_B + 20 - 2y_A = 0 \\ y_B^R(y_A) &= 5 - \frac{y_A}{2}\end{aligned}$$

(b) Das Cournot-Gleichgewicht ermittelt man schließlich durch „Einsetzen der beiden Reaktionsfunktionen ineinander“:

$$\begin{aligned} y_A^C &= y_A^R\left(y_B^R\left(y_A^C\right)\right) \\ y_A^C &= 3 - \frac{5 - \frac{y_A^C}{2}}{4} \end{aligned}$$

Auflösen nach y_A^C ergibt

$$y_A^C = 2$$

und Einsetzen in y_B^R

$$y_B^C = y_B^R\left(y_A^C\right) = 5 - \frac{y_A^C}{2} = 5 - \frac{2}{2} = 4.$$

Aufgabe 9 (8 Punkte)
In einem winzigen Bergdorf leben 20 Menschen mit identischen Präferenzen. Es gibt dort nur ein privates und ein öffentliches Gut. Die Präferenzen einer typischen Person i werden durch die Nutzenfunktion $u_i(x_i, y) = \frac{x_i}{2} + \sqrt{y}$ beschrieben, wobei x_i die von i konsumierte Menge des privaten Gutes und y die Menge des öffentlichen Gutes bezeichnet. Der Preis des privaten Gutes beträgt $p_x = 2$ und der Preis des öffentlichen Gutes $p_y = 10$.
Ermitteln Sie die Pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes!

Lösungsvorschlag

Im Pareto-Optimum ist die Summe der Grenzraten der Substitution aller Einwohner für das öffentliche Gut (ausgedrückt in Einheiten des privaten Gutes) gleich den Grenzkosten des öffentlichen Gutes (wiederum ausgedrückt in Einheiten des privaten Gutes). Die Grenzrate der Substitution einer Person lautet

$$MRS_i = \frac{dx_i}{dy} = \frac{MU_y}{MU_{x_i}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Die Summe der Grenzraten der Substitution aller Einwohner (MRS) beträgt also

$$MRS = 20 \cdot MRS_i = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{20}{\sqrt{y}}.$$

Die Grenzkosten des öffentlichen Gutes (MC) sind durch das Preisverhältnis gegeben,

$$MC = \frac{p_y}{p_x} = \frac{10}{2} = 5.$$

Die Optimalitätsbedingung lautet demnach

$$\frac{20}{\sqrt{y^*}} = MRS \stackrel{!}{=} MC = 5.$$

Auflösen ergibt die Pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes, $y^* = 16$.

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$. Es hat keinen Einfluss auf die Faktorpreise w_1 und w_2 sowie den Güterpreis p.
Bestimmen Sie die Faktornachfragefunktion für den ersten Produktionsfaktor!

Lösungsvorschlag

Die Gewinnoptimierungsbedingungen im Inputraum lauten:

$$\begin{aligned} w_1 &\stackrel{!}{=} p \cdot MP_1 = p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = p \cdot \frac{1}{3} \cdot x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} \\ w_2 &\stackrel{!}{=} p \cdot MP_2 = p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = p \cdot \frac{1}{2} \cdot x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Auflösen dieses Gleichungssystems nach x_1 ergibt schließlich

$$x_1^* = \frac{1}{216} \frac{p^6}{w_2^3 w_1^3}.$$

Aufgabe 11 (12 Punkte)
In unmittelbarer Nähe einer Müllverbrennungsanlage, mit der Gewinnfunktion

$$\Pi^M(x) = 20x - x^2,$$

betreibt ein Unternehmen, dessen Gewinnfunktion

$$\Pi^W(x,y) = 16y - \frac{1}{2}y^2 - xy$$

lautet, eine Wohnanlage. Dabei steht y für die Anzahl der vermieteten Wohnungen und x für die in der Müllverbrennungsanlage verbrannte Menge Müll.

(a) Bestimmen Sie die Aktivitätsniveaus der beiden Unternehmen im Gleichgewicht (Schadensrecht)!

(b) Bestimmen Sie die Höhe der Aktivitätsniveaus der Unternehmen nach einer Fusion!

Lösungsvorschlag

(a) Wir wenden das wohlbekannte Maximierungskalkül an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi^M}{dx} &= 20 - 2x^* \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial \Pi^W}{\partial y} &= 16 - y^* - x^* \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Auflösen der ersten Gleichung ergibt $x^* = 10$, was eingesetzt in die zweite Gleichung $y^* = 6$ ergibt.

(b) Zunächst stellen wir die gemeinsame Gewinnfunktion auf:

$$\begin{aligned} \Pi(x,y) &= \Pi^M(x) + \Pi^W(x,y) \\ &= 20x - x^2 + 16y - \frac{1}{2}y^2 - xy \end{aligned}$$

Anwendung des bekannten Optimierungskalküls ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 20 - 2x^{\#} - y^{\#} \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= 16 - y^{\#} - x^{\#} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Auflösen dieses Gleichungssystems ergibt $x^{\#} = 4$ sowie $y^{\#} = 12$.