Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein Individuum steht zwei Güterbündeln, A und B, gegenüber. Güterbündel A beinhaltet 4 Einheiten des ersten Gutes $\left(x_1^A = 4\right)$ und 9 Einheiten des zweiten $\left(x_2^A = 9\right)$; Güterbündel B ist durch $x_1^B = 5$ und $x_2^B = 3$ gegeben. Die Preise der Güter sind $p_1 = 2$ und $p_2 = 1$. Dem Individuum steht ein Budget in Höhe von 15 Geldeinheiten zur Verfügung. Die Präferenzen werden durch die Nutzenfunktion $u\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 2x_2$ repräsentiert.
Welches Güterbündel **präferiert** der Haushalt?

Lösungsvorschlag

Das Güterbündel A wird dem Güterbündel B vorgezogen, da

$$u\left(4, 9\right) = 4 + 2 \cdot 9 = 22 > 11 = 5 + 2 \cdot 3 = u\left(5, 3\right)$$

gilt.

Hinweis: Dass sich der Haushalt das erste Güterbündel im Gegensatz zum zweiten Güterbündel nicht leisten kann – $4 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 17 > 15 = m > 13 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1$ – spielt dabei keine Rolle, da Präferenzen unabhängig vom Budget sind.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Ein Haushalt konsumiert zwei Güter, 1 und 2. Die Präferenzen des Haushalts sind durch die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$ gegeben, wobei x_1 die von Gut 1 konsumierte Menge und x_2 die von Gut 2 konsumierte Menge bezeichnet. Das Einkommen des Haushalts beträgt $m = 8$; der Preis von Gut 1 beträgt $p_1 = 2$ und der von Gut 2 beträgt $p_2 = 4$.
Ermitteln Sie alle Haushaltsoptima!

Lösungsvorschlag
Es gilt

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{MU_2}{p_2}.$$

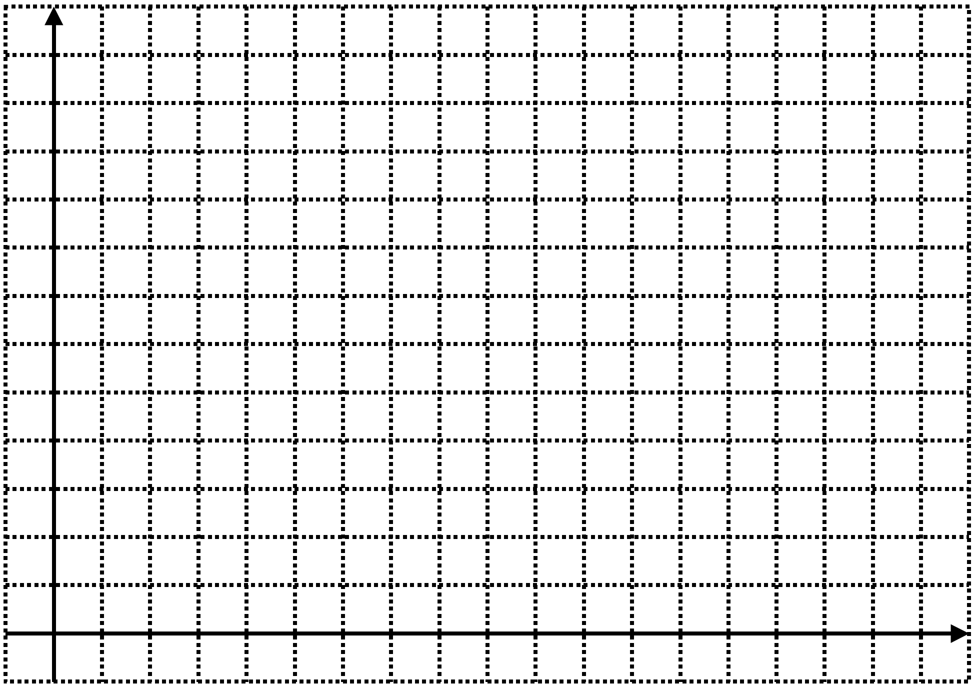
Der Haushalt wird sein Einkommen also beliebig für die beiden Güter vollständig ausgeben; alle gerade noch leistbaren Güterbündel sind dem Haushalt gleich lieb. Also gilt für die Haushaltsgleichgewichte

$$\begin{aligned} m &= p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \\ \text{oder} \quad 8 &= 2x_1^* + 4x_2^* \\ \text{oder} \quad x_2^* &= 2 - \frac{x_1^*}{2} \geq 0 \qquad 0 \leq x_1^* \leq 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Auf dem Markt für den Produktionsfaktor Arbeit L fragen zwei Unternehmen, A und B, nach. Die inversen Faktornachfragefunktionen der Unternehmen sind durch

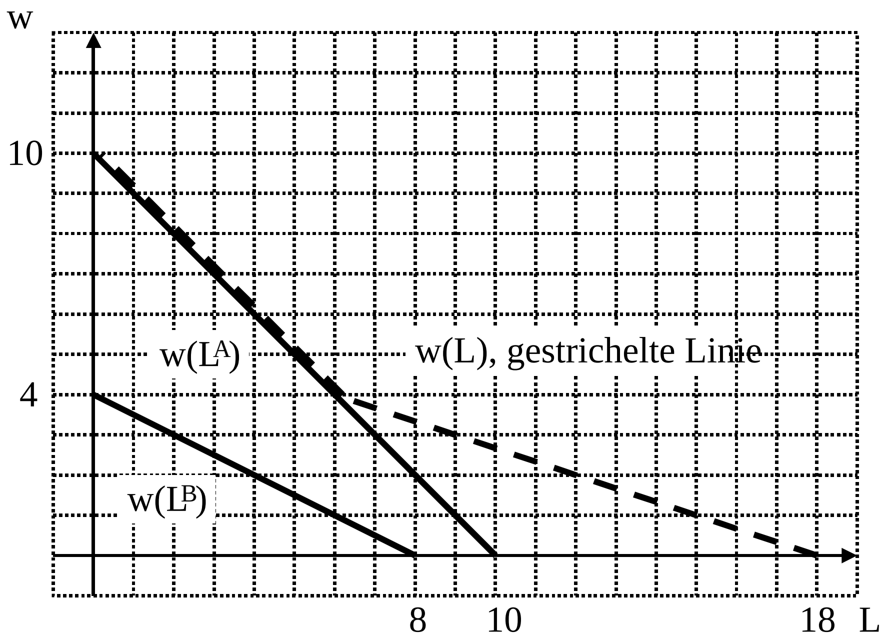
$$\begin{aligned} w\left(L^A\right) &= 10 - L^A \\ w\left(L^B\right) &= 4 - \frac{1}{2} \cdot L^B. \end{aligned}$$

gegeben, wobei L^A die von Unternehmen A und L^B die von Unternehmen B nachgefragte Menge Arbeit bezeichnet. $w\left(L^A\right)$ bzw. $w\left(L^B\right)$ steht für den Lohnsatz, bei dem L^A bzw. L^B beschäftigt werden kann.
Zeichnen Sie die beiden inversen Faktornachfragefunktionen und bestimmen Sie die Gesamtfaktornachfragefunktion auf diesem Markt sowohl graphisch als auch analytisch! Nutzen Sie für die Zeichnung das auf der nächsten Seite beigefügte Raster/Diagramm!



Lösungsvorschlag

- Grafik:



- Liegt der Lohnsatz zwischen 4 und 10 fragt nur Unternehmen A den Produktionsfaktor nach. Gilt hingegen $0 \leq w \leq 4$, fragen beide Unternehmen den Faktor nach. Für die Addition der Nachfragen müssen zunächst die Faktornachfragefunktionen bestimmt werden (horizontale Addition). Sie lauten:

$$\begin{aligned} L^A(w) &= 10 - w \\ L^B(w) &= 8 - 2w. \end{aligned}$$

Die Nachfrage im Lohnintervall $0 \leq w \leq 4$ bestimmt sich dann durch

$$\begin{aligned} L(w) &= L^A(w) + L^B(w) \\ &= 10 - w + 8 - 2w \\ &= 18 - 3w. \end{aligned}$$

Als Gesamtnachfrage resultiert:

$$L(w) = \begin{cases} 0, & w > 10 \\ 10 - w, & 4 < w \leq 10 \\ 18 - 3w, & 0 \leq w \leq 4. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Die Angebotsfunktion auf einem Markt lautet:

$$S(p) = 10 + 2p.$$

Die Nachfragefunktion des Marktes ist gegeben durch:

$$D(p) = 30 - 2p$$

(a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis!

(b) Welche Menge wird auf dem Markt gehandelt, wenn der Staat einen Höchstpreis in Höhe von $p = 4$ festlegt?

(c) Welche Menge wird auf dem Markt gehandelt, wenn der Staat einen Höchstpreis in Höhe von $p = 6$ festlegt?

Lösungsvorschlag

(a) Befindet sich der Markt im Gleichgewicht, so gilt für den Gleichgewichtspreis p^*:

$$\begin{aligned} S(p^*) &= D(p^*) \\ 10 + 2p^* &= 30 - 2p^* \\ 4p^* &= 20 \\ p^* &= 5 \end{aligned}$$

(b) Der Höchstpreis $p = 4$ liegt unterhalb des Gleichgewichtspreises, so dass er wirksam ist. Dann ergibt sich

$$S(4) = 18 \text{ und } D(4) = 22.$$

Da die „kürzere“ Marktseite entscheidend ist, wird bei bei einem Höchstpreis von 4 die Menge 18 gehandelt.

(c) Der Höchstpreis $p = 6$ liegt oberhalb des Gleichgewichtspreises, so dass er unwirksam ist. Es stellt sich dann also der Gleichgewichtspreis aus dem ersten Aufgabenteil ein. Die dann gehandelte Menge beträgt

$$y = S(5) = D(5) = 20.$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Ein Copyshop kopiert Flyer mittels folgender Produktionstechnologie:

$$y_F = \min\left\{x_P, 1000x_M\right\},$$

wobei y_F für die Anzahl der Flyer, x_P für den Einsatz eines Blattes Papier (einschließlich Farbe) und x_M für den Einsatz einer Maschinenstunde stehen. Die Faktorpreise lauten $w_P = 0,01$ und $w_M = 20$.
Bestimmen Sie die langfristige Kostenfunktion!

Lösungsvorschlag
Hier liegt eine limitationale Produktionsfunktion vor. Die Minimalkostenkombinationen liegen also im Knick der L-förmigen Isoquanten. Also gilt

$$x_P(y) \stackrel{!}{=} 1000x_M(y)$$

und damit

$$y = x_P(y) = 1000x_M(y),$$

also

$$\begin{aligned} x_P(y) &= y \\ x_M(y) &= \frac{1}{1000}y \end{aligned}$$

Die Bewertung dieser Minimalkostenkombination mit den Faktorpreisen ergibt schließlich die Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} c(y) &= w_P x_P(y) + w_M x_M(y) \\ &= 0,01y + \frac{20}{1000}y \\ c(y) &= 0,03y. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (9 Punkte)
Die Angebotsfunktion eines Unternehmens, das im vollkommenem Wettbewerb am Absatzmarkt für ein Gut steht, lautet $q(p) = 4p - 8$, wobei $q(p)$ die bei einem Preis von p angebotene Menge bezeichnet.
Bestimmen Sie Umsatz und Produzentenrente bei einem Preis von 4!

Lösungsvorschlag
Bei einem Preis von $p = 4$ setzt das Unternehmen

$$q(p) = q(4) = 4 \cdot 4 - 8 = 8$$

Einheiten des Produktes ab. Der Erlös beträgt dann

$$R = p \cdot q(p) = 4 \cdot q(4) = 4 \cdot 8 = 32.$$

Wir bestimmen nun die variablen Kosten C_{var} für die Produktion der 8 Einheiten des Gutes: Zunächst formen wir die Angebotsfunktion zur inversen Angebotsfunktion um:

$$p(q) = 2 + \frac{q}{4}$$

Für das gewinnmaximale Angebot gilt bekanntermaßen „Preis = Grenzkosten“, also

$$MC(q) = 2 + \frac{q}{4}.$$

Die variablen Kosten erhält man dann durch Integrieren der Grenzkostenfunktion von der Menge 0 bis zur Menge $q(4) = 8$,

$$C_{var} = \int_0^8 MC(q)\,dq = \int_0^8 2 + \frac{q}{4} dq = 2q + \frac{1}{8}q^2 \Big|_0^8 = 2 \cdot 8 + \frac{1}{8}8^2 = 24.$$

(Hinweis: Das geht natürlich auch mithilfe einer geeigneten Zeichnung und der Dreiecksflächenformel.) Die Produzentenrente ergibt sich schließlich als Differenz von Erlös und variablen Kosten

$$PR = R - C_{var} = 32 - 24 = 8.$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)
Zwei Unternehmen, A und B, bieten auf einem Markt dasselbe Gut an. Dabei legt Unternehmen A zunächst seine Angebotsmenge fest. Unternehmen B kann diese Menge beobachten und entscheidet danach über seine Angebotsmenge.

Die Gesamtnachfrage auf diesem Markt ist durch die inverse Nachfragefunktion $p(y) = 24 - 2y$ gegeben, wobei die Menge y zum Preis von $p(y)$ abgesetzt werden kann. Die Kosten von Unternehmen A zur Produktion von y_A Einheiten dieses Gutes betragen $C_A(y_A) = y_A^2$. Unternehmen B hat konstante Durchschnittskosten in Höhe von 8.

(a) Bestimmen Sie die Reaktionsfunktion von Unternehmen B!

(b) Ermitteln Sie nun die im Stackelberg-Gleichgewicht angebotenen Mengen!

Lösungsvorschlag
Wir lösen „von hinten". Dazu bestimmen wir zunächst die Reaktionsfunktion y_B^R von Unternehmen B (Stackelberg-Folger).

(a) Ausgehend von dessen Gewinnfunktion

$$\begin{aligned}\pi_B(y_A, y_B) &= p(y_A + y_B)\, y_B - 8 \cdot y_B \\ &= (24 - 2(y_A + y_B))\, y_B - 8 \cdot y_B\end{aligned}$$

erhalten wir über die Maximierungsbedingung

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial y_B} = 24 - 2y_A - 4y_B - 8 = 0$$

die Reaktionsfunktion

$$y_B^R(y_A) = 4 - \frac{y_A}{2}.$$

(b) Diese setzen wir in die Gewinnfunktion

$$\pi_A(y_A, y_B) = (24 - 2(y_A + y_b))\, y_A - y_A^2$$

von Unternehmen A (Stackelberg-Führer) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\pi_A\left(y_A, y_B^R(y_A)\right) &= \left(24 - 2\left(y_A + 4 - \frac{y_A}{2}\right)\right) y_A - y_A^2 \\ &= (16 - y_A)\, y_A - y_A^2.\end{aligned}$$

Auflösen der Maximierungsbedingung

$$\frac{d\pi_A}{dy_A} = 16 - 2y_A^S - 2y_A^S = 0$$

ergibt die Stackelberg-Menge von Unternehmen A,

$$y_A^S = 4.$$

Einsetzen von y_A^S in die Reaktionsfunktion von Unternehmen B ergibt schließlich dessen Stackelberg-Menge,

$$y_B^S = y_B^R\left(y_A^S\right) = 4 - \frac{y_A^S}{2} = 4 - \frac{4}{2} = 2.$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Blubber und Callisto leben in einer Zweier-WG. Die beiden mögen Glitzerstaub, den sie in der Küche in einem großen Goldfischglas gemeinsam sammeln. Blubbers Zahlungsbereitschaft für y Einheiten Glitzerstaub beträgt $ZB_B\left(y\right) = 4y^2$ und die von Callisto $ZB_C\left(y\right) = 8y$. Die Kosten für die Anschaffung, Lagerung und Pflege von y Einheiten Glitzerstaub betragen $C\left(y\right) = 8y^2$.
Wie groß ist die Pareto-optimale Menge Glitzerstaub in der WG?

Lösungsvorschlag

Glitzerstaub ist offenbar ein öffentliches Gut. Die Pareto-optimale Menge Glitzerstaub, y^*, genügt dann der Bedingung

$$MZB_B\left(y^*\right) + MZB_C\left(y^*\right) \stackrel{!}{=} MC\left(y^*\right),$$

wobei

$$MZB_B = \frac{dZB_B}{dy} = 8y \quad \text{und} \quad MZB_C = \frac{dZB_C}{dy} = 8$$

die marginalen Zahlungsbereitschaften für Glitzerstaub und

$$MC = \frac{dC}{dy} = 16y$$

dessen Grenzkosten bezeichnen. Es gilt also

$$8y^* + 8 \stackrel{!}{=} 16y^*$$

d.h.

$$y^* = 1.$$