Exercise 0.1 (6 Punkte). *Ein Haushalt mit der Nutzenfunktion* $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ *gibt sein gesamtes Einkommen* $m = 5$ *für die beiden Güter mit den Preisen* $p_1 = 1$ *und* $p_2 = 2$ *aus. Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!*

Remark 1 (Loesungsvorschlag).

$$\begin{aligned}
MRS &= \frac{p_1}{p_2} \\
\frac{\frac{1}{2}x_1^{-0,5}}{1} &= \frac{1}{2} \\
\sqrt{x_1} &= 1 \\
x_1^* &= 1 \\
m &= p_1x_1 + p_2x_2 \\
x_2^* &= \frac{m - p_1x_1^*}{p_2} = \frac{5-1}{2} = 2
\end{aligned}$$

Die Nutzenfunktion u *repräsentiert keine perfekten Substitute und lässt sich auch nicht in eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion transformieren.*

Exercise 0.2 (6 Punkte). *Ein Individuum muss sich zwischen den folgenden zwei Lotterien entscheiden:*

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \left[100, 0; \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right] \\
L_2 &= \left[100, 25; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]
\end{aligned}
$$

Dabei geben jeweils die linken beiden Zahlen Auszahlungen an und die rechten beiden die Eintrittswahrscheinlichkeiten für diese Auszahlungen (in der Reihenfolge der Auszahlungen).

1. *Für welche der beiden Lotterien wird sich das Individuum entscheiden, wenn seine vNM-Nutzenfunktion (vNM für von Neumann und Morgenstern) durch* $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$ *gegeben ist?*

2. *Bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent der zweiten Lotterie!*

Remark 2 (Loesungsvorschlag).

1. *Für die Entscheidung des Individuums sind die erwarteten Nutzen der Lotterien die Entscheidungsgrundlage. Diese lauten:*

$$
\begin{aligned}
E_{L_1}(u) &= \frac{3}{5} \cdot u(100) + \frac{2}{5} \cdot u(0) \\
&= \frac{3}{5} \cdot 10 \\
&= 6 \\
E_{L_2}(u) &= \frac{2}{5} \cdot u(100) + \frac{3}{5} \cdot u(25) \\
&= \frac{2}{5} \cdot 10 + \frac{3}{5} \cdot 5 \\
&= 4 + 3 = 7
\end{aligned}
$$

Aufgrund des höheren erwarteten Nutzens der Lotterie L_2 *wird das Individuum diese Lotterie vorziehen.*

2. *Für das Sicherheitsäquivalent muss gelten*

$$
\begin{aligned}
u(CE) &= E_{L_2}(u) \\
\sqrt{CE} &= 7 \\
CE &= 49.
\end{aligned}
$$

Exercise 0.3 (4 Punkte). *Ermitteln Sie für die Produktionsfunktion* $y = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ *die Faktornachfragefunktion für den Produktionsfaktor* 1*! Nehmen Sie an, das Unternehmen habe keinerlei Einfluss auf die Faktorpreise* w_1 *und* w_2 *sowie den Güterpreis* p*.*

Remark 3 (Loesungsvorschlag).

Gewinnmaximierung im Inputraum verlangt $p \cdot MP_i = w_i$*:*

$$\begin{aligned} p \cdot MP_1 &= w_1 \\ p\frac{1}{2}\, x_1^{*\,-\frac{1}{2}} &= w_1 \\ x_1^{*\,\frac{1}{2}} &= \frac{p}{2w_1} \\ x_1^* &= \frac{p^2}{4w_1^2} \end{aligned}$$

Variante: *Alternativ kommt man auch mit der Gewinnfunktion zum Ziel:*

$$\begin{aligned} \Pi(x_1, x_2) &= p \cdot f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2 \\ &= p \cdot \sqrt{x_1} + p \cdot 2\sqrt{x_2} - w_1 x_1 - w_2 x_2 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= p \cdot \frac{1}{2}\, x_1^{*\,-\frac{1}{2}} - w_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ x_1^* &= \frac{p^2}{4w_1^2} \end{aligned}$$

Exercise 0.4 (10 Punkte). *Ein Haushalt mit der Nutzenfunktion* $u(x_1, x_2) = \min\left\{x_1, \frac{1}{2}x_2\right\}$ *gibt sein gesamtes Einkommen* $m = 12$ *für die beiden Güter aus. Die Güter haben zunächst die Preise* $p_1 = 2$ *und* $p_2 = 2$*. Der Preis des ersten Gutes steigt dann auf* $p_1^{neu} = 4$*.*

1. *Bestimmen Sie die optimalen Konsumbündel bei den Preisen* $p_1 = 2$ *und* $p_2 = 2$ *sowie bei den Preisen* $p_1^{neu} = 4$ *und* $p_2 = 2$*.*

2. *Bestimmen Sie die kompensatorische Variation und interpretieren Sie diese!*

Remark 4 (Loesungsvorschlag).

1. Im Haushaltsoptimum gilt bei beiden Preisverhältnissen:

$$x_1^* = \frac{1}{2}x_2^*.$$

   Setzt man dies bei $p_1 = 2$ und $p_2 = 2$ in die Budgetgleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \cdot \frac{1}{2}x_2^* + 2 \cdot x_2^* = 3 \cdot x_2^* \\ x_2^* &= 4 \\ x_1^* &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2. \end{aligned}$$

   Bei $p_1 = 4$ und $p_2 = 2$ erhält man:

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot \frac{1}{2}x_2^* + 2 \cdot x_2^* = 4 \cdot x_2^* \\ x_2^* &= 3 \\ x_1^* &= 1,5 \end{aligned}$$

2. Soll der Haushalt nach der Preiserhöhung nicht schlechter gestellt werden (sein Nutzen also der ursprüngliche bleiben), so muss er sich gerade 2 Einheiten von Gut 1 und 4 Einheiten von Gut 2 leisten können (Das optimale Verhältnis von x_1 und x_2 bleibt unverändert, da die Güter perfekte Komplemente sind). Dafür muss man ihm folgenden Geldbetrag geben:

$$\begin{aligned} 12 + CV &= 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 16 \\ CV &= 4 \end{aligned}$$

   Die kompensatorische Variation ist also die Entschädigungsforderung für das Dulden der Preiserhöhung (Umweltverschlechterung).

Exercise 0.5 (8 Punkte). *Die Nachfrage auf einem Markt ist durch die inverse Nachfragefunktion $p(X) = 5 - \frac{1}{4} \cdot X$ gegeben, wobei $p(X)$ den Marktpreis bei der auf dem Markt insgesamt nachgefragten Menge X bezeichnet. Der Preis steigt von 2 auf 3.*

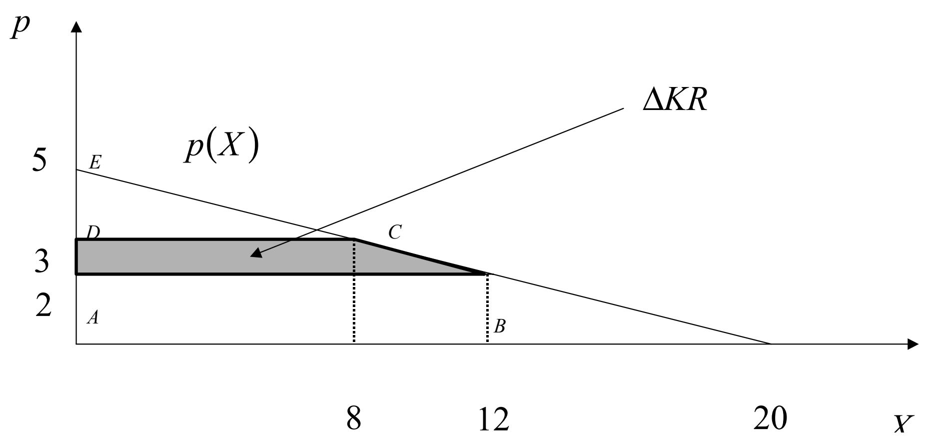
1. *Veranschaulichen Sie die* **Änderung** *der Konsumentenrente in einer geeigneten Graphik (Skizze genügt)!*

2. *Um welchen Betrag* **ändert** *sich die Konsumentenrente?*

Remark 5 (Loesungsvorschlag).
In der unten stehenden Abbildung ist die Nachfragekurve sowie die Nachfrage bei den Preisen von 2 und 3 dargestellt. Dazu sind die Nachfrage beim Preis von 2 und 3 zu ermitteln. Dazu formen wir zunächst die inverse Nachfragefunktion in die direkte Nachfragefunktion um:

$$X(p) = 20 - 4p$$

Dann erhalten wir $X(2) = 12$ und $X(3) = 8$. Die Konsumentenrente vor der Preiserhöhung liegt zwischen (inverser) Nachfragekurve und der Preis-gleich-2-Linie bis zur Menge $X(2)$, entspricht also der Fläche des Dreiecks ABE. Analog entspricht die Konsumentenrente nach der Preiserhöhung der Fläche zwischen (inverser) Nachfragekurve und der Preis-gleich-3-Linie bis zur Menge $X(3)$, entspricht also der Fläche des Dreiecks DCE. Die Differenz der Konsumentenrenten ist also negativ und entspricht der Fläche des grau unterlegten Trapezes $ABCD$.



***Variante A**: Man hat die Differenz der Konsumentenrenten nach (Fläche des Dreiecks DCE) und vor der Preiserhöhung (Fläche des Dreiecks ABE) zu ermitteln. Mit der bekannten Dreiecksflächenformel erhält man*

$$\Delta KR = \frac{1}{2} \cdot (5-3) \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot (5-2) \cdot 12 = -10.$$

***Variante B**: Man kann die Differenz der Konsumentenrenten auch als (negativ genommene, da Preiserhöhung) Fläche des Trapezes $ABCD$ in der obigen Abbildung ermitteln. Hierzu wendet man die bekannte Trapezflächenformel an:*

$$\Delta KR = -\frac{1}{2} \cdot (3-2) \cdot (12+8) = -10.$$

***Variante C**: Die Differenz der Konsumentenrente ermittelt man direkt durch Integrieren der Nachfragefunktion von 2 nach 3, wobei man beachtet, dass diese aufgrund des steigenden Preises negativ sein muss:*

$$\begin{aligned}
\Delta KR &= -\int_2^3 20 - 4p \, dp \\
&= -\left(40p - 2p^2 \Big|_2^3 \right) \\
&= -\left(\left(20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 \right) - \left(20 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 \right) \right) \\
&= -10.
\end{aligned}$$

Exercise 0.6 (12 Punkte). *Die Nachfrage für ein Gut auf einem Markt mit vollkommener Konkurrenz ist durch die Nachfragefunktion $Y(p) = 10 \cdot (12 - p)$ gegeben, wobei $Y(p)$ die beim Marktpreis p insgesamt nachgefragte Menge bezeichnet. Die auf diesem Markt agierenden Unternehmen haben dieselbe langfristige Kostenfunktion (Technologie A)*

$$C_A(y) = \begin{cases} 18 + y^2 & , y > 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases},$$

wobei y die von einem einzelnen Unternehmen produzierte Menge bezeichnet.

1. *Wie viele Unternehmen werden im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht auf diesem Markt anbieten? Welcher Preis und welche Gesamtmenge stellen sich dann ein?*

2. *Durch eine Innovation ist eine* **weitere** *Technologie, Technologie B, für die Herstellung des Gutes verfügbar. Diese führt zur langfristigen Kostenfunktion*

$$C_B(y) = \begin{cases} 8 + 2y^2 & , y > 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases},$$

wobei y wiederum die von einem einzelnen Unternehmen produzierte Menge bezeichnet. Die Unternehmen können zwischen den Technologien wählen.

Was ändert sich? Konkreter: Welche Technologie setzt sich durch? Wie viele Unternehmen werden nun auf diesem Markt anbieten? Welcher Preis und welche Gesamtmenge stellen sich jetzt ein?

Remark 6 (Loesungsvorschlag).

1. *Im langfristigen Gleichgewicht gilt*

$$p(Y^*) = AC_A(y_A^*) = MC_A(y_A^*)$$

wobei Y^* die im langfristigen Gleichgewicht insgesamt produzierte und y_A^* die von einem einzelnen Unternehmen produzierte Menge bezeichnet. Über

$$\frac{18}{y_A^*} + y_A^* = \frac{C_A(y_A^*)}{y_A^*} = AC_A(y^*) \overset{!}{=} MC_A(y^*) = \frac{dC_A}{dy} = 2y_A^*$$

bestimmen wir

$$y_A^* = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Das Minimum der Durchschnittskosten und damit der langfristige Gleichgewichtspreis beträgt dann

$$p^* = p(Y^*) = AC_A^{\min} = AC_A(y_A^*) = \frac{18}{\sqrt{18}} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2}.$$

Einsetzen in die Nachfragefunktion ergibt die insgesamt produzierte Menge

$$Y^* = Y(p^*) = 10 \cdot \left(12 - 6\sqrt{2}\right) = 60 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Da ein einzelnes Unternehmen die Menge $y_A^* = 3\sqrt{2}$ *anbietet, erhalten wir die im langfristigen Gleichgewicht auf dem Markt agierende Anzahl von Unternehmen*

$$n^* = \frac{Y^*}{y_A^*} = \frac{60 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)}{3\sqrt{2}} = 20 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right).$$

2. *Wir ermitteln für Unternehmen mit der Technologie* B *das Minimum der Durchschnittskosten und die dort von einen einzelnen Unternehmen produzierte Menge (wie oben) über den Ansatz*

$$\frac{8}{y_B^*} + 2y_B^* = \frac{C_B(y_B^*)}{y_B^*} = AC_B(y^*) \stackrel{!}{=} MC_B(y^*) = \frac{dC_B}{dy} = 4y_B^*$$

und erhalten

$$y_B^* = 2.$$

sowie

$$AC_B^{\min} = AC_B\left(y_B^{\min}\right) = \frac{8}{2} + 2 \cdot 2 = 8.$$

Das Minimum der Durchschnittskosten liegt unter dem der Technologie A,

$$AC_B^{\min} = 8 < 6\sqrt{2} = AC_A^{\min}.$$

Im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht wird sich also Technologie B *durchsetzen.*

Wir setzen wie oben fort: Der Gleichgewichtspreis stellt sich nun bei

$$p^{**} = AC_B^{\min} = 8$$

ein, was eine Gesamtachfrage von

$$Y^{**} = Y\left(p^{**}\right) = 10 \cdot (12 - 8) = 40$$

nach sich zieht. Dann agieren also

$$n^{**} = \frac{Y^{**}}{y_B^*} = \frac{40}{2} = 20$$

Unternehmen am Markt.

Exercise 0.7 (6 Punkte). *Die inverse Marktnachfrage für ein Gut sei durch* $p(x) = 16 - x$ *gegeben, wobei* x *die gesamte am Markt nachgefragte Menge bezeichnet. Die Kostenfunktion des Monopolisten auf diesem Markt sei* $c(x) = x^2$.

1. *Welche Menge wird der Monopolist anbieten?*
2. *Wie hoch ist dann der Preis?*

Remark 7 (Loesungsvorschlag).

1. *Im Gewinnmaximum des* ***Monopolisten*** *gilt* $MR = MC$:

$$\begin{aligned} R &= p(x) \cdot x \\ &= 16x - x^2 \\ MR &= \frac{dR}{dx} = 16 - 2x \\ MC &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MR &= MC \\ 16 - 2x &= 2x \\ 16 &= 4x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Gewinnfunktion des Monopolisten aufstellen und ableiten:

$$\begin{aligned} \Pi = R - C = p(x) \cdot x - c(x) \\ = \left(16x - x^2\right) - x^2 \\ = 16x - 2x^2 \\ \frac{d\Pi}{dx} = 16 - 4x \overset{!}{=} 0 \\ x = 4 \end{aligned}$$

2.

$$p(4) = 16 - 4 = 12$$

Exercise 0.8 (8 Punkte). *In einen kleinen Örtchen in der Sächsischen Schweiz leben* 40 *Menschen mit identischen Präferenzen. Es gibt dort nur ein privates und ein öffentliches Gut. Die Präferenzen einer typischen Person* i *werden durch die Nutzenfunktion* $u_i(x_i, y) = x_i + \ln y$ *beschrieben, wobei* x_i *die von* i *konsumierte Menge des privaten Gutes und* y *die Menge des öffentlichen Gutes bezeichnet. Der Preis des privaten Gutes beträgt* $p_x = 1$ *und der Preis des öffentlichen Gutes* $p_y = 5$.
Ermitteln Sie die Pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes!

Remark 8 (Loesungsvorschlag).
Im Pareto-Optimum ist die Summe der Grenzraten der Substitution aller Einwohner für das öffentliche Gut (ausgedrückt in Einheiten des privaten Gutes) gleich den Grenzkosten des öffentlichen Gutes (wiederum ausgedrückt in Einheiten des privaten Gutes). Die Grenzrate der Substitution einer Person lautet

$$MRS_i = \frac{dx_i}{dy} = \frac{MU_y}{MU_{x_i}} = \frac{\frac{1}{y}}{1} = \frac{1}{y}.$$

Die Summe der Grenzraten der Substitution aller Einwohner (MRS) *beträgt also*

$$MRS = 40 \cdot MRS_i = 40 \cdot \frac{1}{y} = \frac{40}{y}.$$

Die Grenzkosten des öffentlichen Gutes (MC) *sind durch das Preisverhältnis gegeben*

$$MC = \frac{p_y}{p_x} = 5.$$

Die Optimalitätsbedingung lautet demnach

$$\frac{40}{y^*} = MRS \overset{!}{=} MC = 5.$$

Auflösen ergibt die Pareto-optimale Menge des öffentlichen Gutes, $y^* = 8$.