1. Klausur WS 2004/2005

Exercise 1.1. ***(7 Punkte)*** *Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion*

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{3}{4}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}.$$

1. *Bestimmen Sie die Grenzproduktivität des zweiten Produktionsfaktors!*
2. *Bestimmen Sie die Produktionselastizität des zweiten Produktionsfaktors!*
3. *Welcher Art sind die Skalenerträge?*

Remark 1 (Loesungsvorschlag).

1. *Die Grenzproduktivität des zweiten Produktionsfaktors bestimmt sich folgendermaßen:*
$$MP_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} \cdot x_1^{\frac{3}{4}}$$
2. *Die Produktionselastizität des zweiten Faktors lässt sich wie folgt bestimmen:*
$$\varepsilon_{y,x_2} = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x_2}{x_2}} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} \cdot x_1^{\frac{3}{4}} \cdot x_2}{x_1^{\frac{3}{4}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$
3. *Für die gegebene Produktionsfunktion ergibt sich*
$$\begin{aligned} f(tx_1, tx_2) &= (tx_1)^{\frac{3}{4}} \cdot (tx_2)^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{\frac{5}{4}} \cdot x_1^{\frac{3}{4}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{\frac{5}{4}} \cdot f(x_1, x_2) > t \cdot f(x_1, x_2) \end{aligned}$$
für $t > 1$. Die Produktionsfunktion weist demnach steigende Skalenerträge auf.

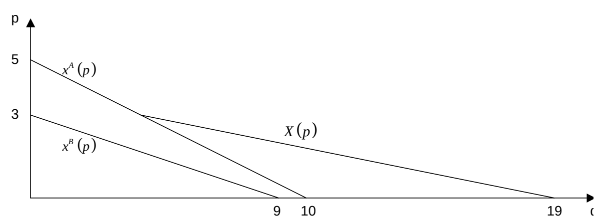
Exercise 1.2. ***(6 Punkte)*** *Zeichnen Sie die beiden inversen Nachfragefunktionen für ein privates Gut*

$$\begin{aligned} p\left(x^A\right) &= 5 - \frac{1}{2} \cdot x^A \\ p\left(x^B\right) &= 3 - \frac{1}{3} \cdot x^B \end{aligned}$$

und aggregieren Sie diese grafisch und analytisch!

Remark 2 (Loesungsvorschlag).

- *Grafik:*



- *Zwischen einem Preis von 3 und 5 fragt nur Konsument A nach. Zwischen einem Preis von 0 und 3 fragen beide Konsumenten das Gut nach. Für die Addition der Nachfragen müssen zunächst die Nachfragefunktionen gebildet werden:*

$$\begin{aligned} x^A(p) &= 10 - 2p \\ x^B(p) &= 9 - 3p. \end{aligned}$$

  Anschließend ergibt sich für $0 \leq p \leq 3$ *folgende Nachfrage:*

$$\begin{aligned} X(p) &= x^A(p) + x^B(p) \\ &= 10 - 2p + 9 - 3p \\ &= 19 - 5p \qquad (1 \text{ } \textit{Punkt}) \end{aligned}$$

  Als Gesamtnachfrage erhält man also

$$X(p) = \begin{cases} 0 & , p > 5 \\ 10 - 2p & , 3 < p < 5 \\ 19 - 5p & , 0 \leq p \leq 3. \end{cases}$$

Exercise 1.3. ***(7 Punkte)*** *Barneys Nutzenfunktion ist gegeben durch*

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + x_2^2.$$

Dabei steht x_1 für die von ihm konsumierte Menge Bier und x_2 für die von ihm konsumierte Menge Wein. Der Preis einer Flasche Bier beträgt dabei 1 *Geldeinheit und der einer Flasche Wein 2 Geldeinheiten. Insgesamt stehen ihm 6 Geldeinheiten als Budget zur Verfügung.*

1. *Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution! Wie ändert sich diese mit steigendem x_1? Skizzieren Sie eine Indifferenzkurve!*

2. *Welche Mengen Bier und Wein konsumiert Barney im Optimum?*

Remark 3 (Loesungsvorschlag).

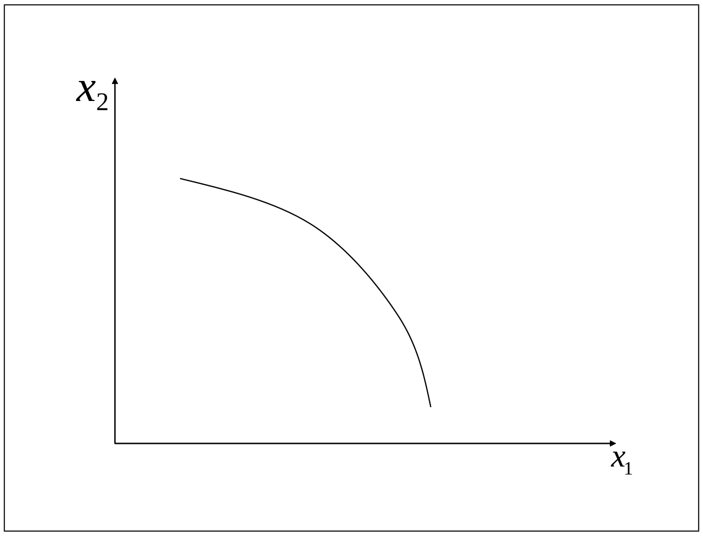
1. *Die Grenzrate der Substitution bestimmt sich wie folgt:*

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_1}{2 \cdot x_2}$$

Entlang einer Indifferenzkurve muss x_2 mit steigendem x_1 sinken (siehe Nutzenfunktion). Mit zunehmendem x_1 und sinkendem x_2 steigt die Grenzrate der Substitution, d.h. die Präferenzen sind konkav.

Remark 4. 1. *Auf Grund des konkaven Verlaufs der Indifferenzkurven erhalten wir ein Rand-Haushaltsoptimum.*

Konsumiert Barney ausschließlich Bier, so kann er sich 6 Einheiten leisten. Dadurch würde er ein Nutzenniveau von 18 realisieren. Konsumiert er ausschließlich Wein, so kann er sich 3 Einheiten leisten, so dass er ein Nutzenniveau von 9 erreicht. Es ist für ihn also optimal 6 Einheiten/Flaschen Bier zu konsumieren.



Exercise 1.4. ***(7 Punkte)*** *Ein gewinnmaximierender Monopsonist produziert mit Hilfe eines Produktionsfaktors x ein Produkt y. Dabei gilt folgende Produktionsfunktion:*

$$y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x.$$

Die inverseAngebotsfunktion des Produktionsfaktors lautet:

$$w(x) = \frac{3}{2} \cdot x + 2.$$

Der Preis für das Produkt auf dem Absatzmarkt beträgt 16. Bestimmen Sie die optimale Einsatzmenge des Produktionsfaktors und den Preis, den der Monopsonist dabei für ihn entrichtet!

Remark 5 (Loesungsvorschlag).

Remark 6. *Die Gewinnfunktion des Monopsonisten lautet*

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= p \cdot f(x) - x \cdot w(x) \\
&= 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - x \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot x + 2 \right) \\
&= 8 \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x \\
&= 6 \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x^2
\end{aligned}$$

Diese Funktion maximiert der Monopsonist, indem er die optimale Einsatzmenge x^* des Produktionsfaktors bestimmt:

$$\frac{\partial \prod}{\partial x} = 6 - 3 \cdot x^* \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus ergibt sich

$$x^* = 2.$$

Durch Einsetzen von x^* in die inverse Angebotsfunktion ergibt sich der Preis, den der Monopsonist für den Produktionsfaktor entrichtet:

$$w(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 + 2 = 5$$

Exercise 1.5. ***(6 Punkte)*** *Betrachten Sie das folgende Bimatrixspiel, in dem die Auszahlungen des Spielers 1 links und die Auszahlungen des Spielers 2 rechts eingetragen sind:*

		Spieler 2	
		links	*rechts*
Spieler 1	*oben*	$3, 2$	$4, 1$
	unten	$7, 1$	$7, 2$

1. *Besitzt Spieler 1 eine dominante Stategie?*
2. *Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte!*

   Geben Sie jeweils die relevanten Ungleichungen an!

Remark 7 (Loesungsvorschlag).

1. *Die Strategie "unten" ist eine streng dominante Strategie für Spieler 1. Es gilt sowohl* $7 > 3$ *als auch* $7 > 4$.
2. *Als Nash-Gleichgewichte kommen nur noch Strategiekombinationen in Betracht, bei denen Spieler 1 "unten" wählt. Wenn Spieler 1 "unten" wählt, so wählt Spieler 2 rechts* $(2 > 1)$, *so dass die Strategiekombination ("unten", "rechts") ein Nashgleichgewicht ist.*

Exercise 1.6. ***(10 Punkte)*** *In einem Land ist der Markt für Baumwolle durch folgende Funktionen charakterisiert:*

$$S(p) = \begin{cases} 2p - 10 & \text{, wenn } p > 5 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und

$$D(p) = 20 - \frac{1}{2}p.$$

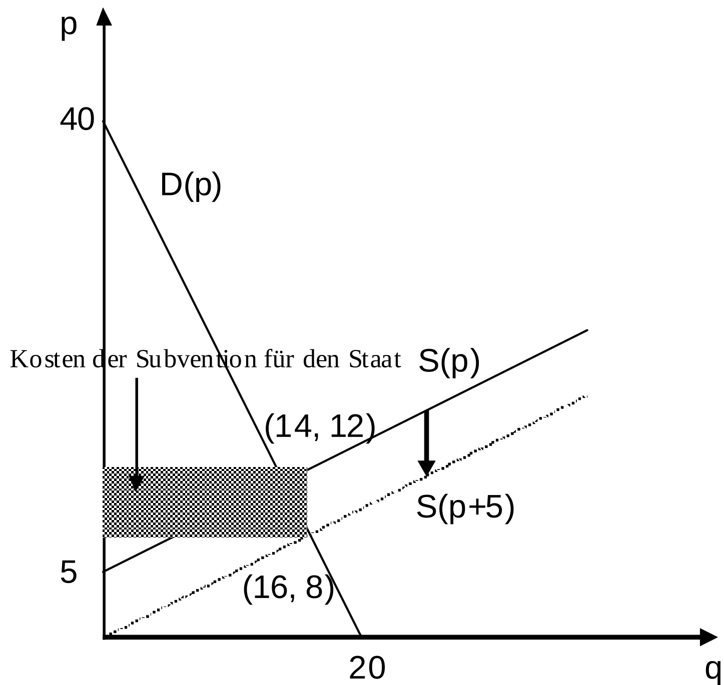
1. *Fertigen Sie eine Grafik an! Bestimmen Sie analytisch den Gleichgewichtspreis und die gehandelte Menge Baumwolle auf dem Markt und tragen Sie ihr Resultat in die Grafik ein!*

2. *Infolge der Lobbyarbeit der Baumwollproduzenten gewährt die Regierung ihnen eine Subvention von 5 Geldeinheiten pro verkaufter Baumwolleinheit. Bestimmen Sie erneut analytisch die sich im Gleichgewicht einstellenden Baumwollpreise und -mengen und tragen Sie die neue Situation in die Grafik des Aufgabenteils 1) ein!*

3. *Welche Kosten verursacht diese Subvention dem Staat? Markieren Sie die entsprechende Fläche in Ihrer Abbildung!*

Remark 8 (Loesungsvorschlag).

1. *Grafik:*



Remark 9. 1. *Die Gleichgewichtsmenge und der Gleichgewichtspreis auf dem Markt ergeben sich durch das Gleichsetzen der Angebots- und der Nachfragefunktion wie folgt:*

$$\begin{aligned} D(p^*) &= S(p^*) \\ 20 - \frac{1}{2}p^* &= 2p^* - 10 \\ p^* &= 12 \\ q^* &= 20 - \frac{1}{2} \cdot 12 = 14 \end{aligned}$$

2. *Durch die Subvention erhalten die Baumwollproduzenten pro verkaufter Einheit Baumwolle 5 Geldeinheiten mehr, so dass sich folgende neue Angebotsfunktion ergibt:*

$$S(p+5) = 2(p+5) - 10 = 2p$$

Die Preise und Mengen im Gleichgewicht ergeben sich wie folgt

$$\begin{aligned} D(p) &= S(p+5) \\ 20 - \frac{1}{2}p &= 2p \\ p &= 8 \\ q &= 16. \end{aligned}$$

Die grafische Veranschaulichung findet sich in der Abbildung des Aufgabenteils 1).

3. *Für jede auf dem Markt gehandelte Einheit Baumwolle muss der Staat 5 Geldeinheiten an die Produzenten zahlen, d.h. die Subventionshöhe beträgt insgesamt:*

$$T = 5 \cdot 16 = 80.$$

   Die grafische Veranschaulichung findet sich in der Abbildung des Aufgabenteils 1) (eingefärbte Fläche).

Exercise 1.7. ***(11 Punkte)*** *In einem Markt agieren zwei Unternehmen. Unternehmen 1 besitzt folgende Kostenfunktion:*

$$c_1(q_1) = q_1^2.$$

Die Kostenfunktion des zweiten Unternehmens ist mit

$$c_2(q_2) = 2 \cdot q_2$$

gegeben. Beide Unternehmen sehen sich der inversen Marktnachfragefunktion

$$p(Q) = 8 - 2 \cdot Q$$

gegenüber, wobei $Q = q_1 + q_2$ gilt.

Bestimmen Sie die Absatzmengen der beiden Unternehmen, die sich in simultanem Mengenwettbewerb ergeben!

Remark 10 (Loesungsvorschlag).

Die Gewinnfunktion des ersten Unternehmens lautet zunächst allgemein wie folgt:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = p(q_1, q_2) \cdot q_1 - c_1(q_1).$$

Setzt man nun die gegebenen Funktionen ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Pi_1(q_1, q_2) &= (8 - 2 \cdot (q_1 + q_2)) \cdot q_1 - q_1^2 \\
&= 8 \cdot q_1 - 2 \cdot q_1^2 - 2 \cdot q_2 \cdot q_1 - q_1^2 \\
&= 8 \cdot q_1 - 3 \cdot q_1^2 - 2 \cdot q_2 \cdot q_1
\end{aligned}$$

Dies wird nun nach q_1 abgeleitet, der Größe die Unternehmen 1 beeinflussen kann:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 8 - 6q_1 - 2 \cdot q_2 \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Umstellen nach q_1 erhält man die Reaktionsfunktion des ersten Unternehmens:

$$R_1(q_2) = \frac{8}{6} - \frac{2}{6} \cdot q_2$$

Für Unternehmen 2 ergibt sich nach gleichem Vorgehen folgendes:

$$\begin{aligned}
\Pi_2(q_1, q_2) &= p(q_1, q_2) \cdot q_2 - c_2(q_2) \\
&= (8 - 2 \cdot (q_1 + q_2)) \cdot q_2 - 2 \cdot q_2 \\
&= 8 \cdot q_2 - 2 \cdot q_2 \cdot q_1 - 2 \cdot q_2^2 - 2 \cdot q_2 \\
&= 6 \cdot q_2 - 2 \cdot q_2 \cdot q_1 - 2 \cdot q_2^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 6 - 4q_2 - 2 \cdot q_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$R_2\left(q_1\right) = \frac{6}{4} - \frac{2}{4} \cdot q_1$$

Durch das Einsetzen der Reaktionsfunktion von Unternehmen 1 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
R_2\left(R_1\left(q_2^C\right)\right) &= \frac{6}{4} - \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{8}{6} - \frac{2}{6} \cdot q_2^C\right) = q_2^C \\
&= \frac{6}{4} - \frac{16}{24} + \frac{4}{24} \cdot q_2 = q_2 \\
\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot q_2^C &= q_2^C \\
\frac{5}{6} &= \frac{5}{6} \cdot q_2^C \\
q_2^C &= 1
\end{aligned}$$

Durch das Einsetzen von q_2^C in die Reaktionsfunktion von Unternehmen 1 ergibt sich dann:

$$R_1\left(1\right) = \frac{8}{6} - \frac{2}{6} \cdot 1 = 1 = q_1^C$$

Exercise 1.8. ***(6 Punkte)*** *Erläutern Sie anhand der Slutsky-Gleichung bei Geldeinkommen, unter welchen Bedingungen ein Gut gewöhnlich ist!*

Remark 11 (Loesungsvorschlag).

Die Slutsky-Gleichung bei Geldeinkommen lautet wie folgt:

$$\frac{\partial x_1^G}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial x_1^S}{\partial p_1}}_{\textit{Substitutionseffekt}} \quad \underbrace{-\frac{\partial x_1^G}{\partial m} \cdot x_1^B}_{\textit{Einkommenseffekt}} .$$

Sie zerlegt den Gesamteffekt einer Preisänderung in einen Substitutionseffekt und in einen Einkommenseffekt.

Der Substitutionseffekt ist immer negativ. Der Einkommenseffekt wirkt bei normalen Gütern in die selbe Richtung, wie der Substitutionseffekt; bei inferioren Gütern wirkt er in die entgegengesetzte Richtung.

Gewöhnliche Güter sind jene Güter, bei denen der Gesamteffekt negativ ist. Eine Preiserhöhung hat also ein Sinken der Nachfrage nach dem Gut zur Folge. Es gibt somit zwei Fälle zu unterscheiden. Zum einen ist ein normales Gut stets ein gewöhnliches Gut, da hier Einkommens- und Substitutionseffekt in die gleiche Richtung wirken. Inferiore Güter sind dann gewöhnliche Güter, wenn der Einkommenseffekt betragsmäßig kleiner ist als der Substitutionseffekt.