Klausur „Grundzüge der Mikroökonomik“ SS 2004

Aufgabe 1 (6 Punkte) Sarahs Nutzenfunktion habe die Form

$$u(x_1, x_2) = c \cdot x_1^a x_2^b, \quad a, b, c > 0.$$

Berechnen Sie das Haushaltsoptimum für das Budget als Geldeinkommen!

Lösungsvorschlag 1

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= c \cdot x_1^a x_2^b \\ \frac{p_1}{p_2} &= \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{c \cdot a x_1^{a-1} x_2^b}{c \cdot b x_1^a x_2^{b-1}} = \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} = MRS \\ p_1 x_1 &= \frac{a}{b} p_2 x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{a}{b} p_2 x_2 + \frac{b}{b} p_2 x_2 = \frac{a+b}{b} p_2 x_2 \\ x_2^* &= \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}, \qquad x_1^* = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} \end{aligned}$$

Lösungen wie $x_1^* = \frac{m}{(1+\frac{b}{a})p_1}$ sind natürlich ebenso richtig.

Lösungsvorschlag 2

Wegen $c > 0$ ist $\frac{1}{c} > 0$ und somit ist die Multiplikation von u mit $\frac{1}{c}$ zulässig und streng monoton.

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{c} u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

Da nicht $a + b = 1$ gegeben ist, muss die Nutzenfunktion fürs Anwenden der gewohnten Lösungsformel für linear homogene Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen ein zweites Mal transformiert werden:

$$w(x_1, x_2) = v^{\frac{1}{a+b}} = x_1^{\frac{a}{a+b}} x_2^{\frac{b}{a+b}}$$

Wir haben also die Summe der Exponenten auf 1 transformiert: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$. Somit lautet die Lösung (gemäß der gewohnten Lösungsformel):

$$x_1^* = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1}, \qquad x_2^* = \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Kim habe eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion, die zu Nachfragen

$$x_1^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1} \qquad \text{und} \qquad x_2^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_2}$$

führe. Zunächst betragen beide Preise 1, $p_1 = p_2 = 1$. Der Preis von Gut 2 steige nun auf $p_2^{neu} = 2$ während sich der Preis von Gut 1 nicht ändert. Das Einkommen beträgt $m = 8$.

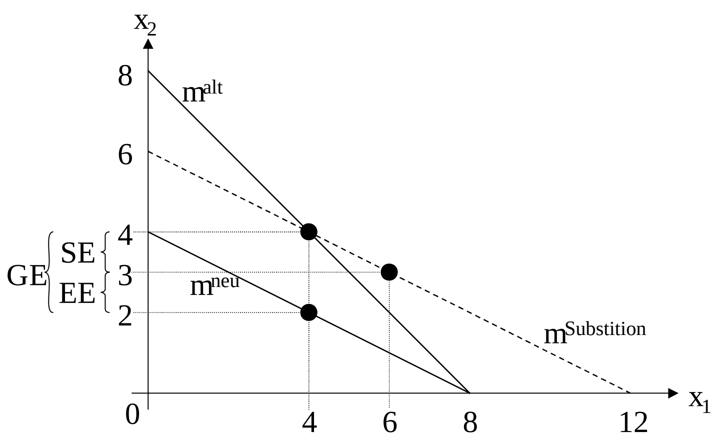
1. Veranschaulichen Sie die Aufteilung des Gesamteffektes dieser Preiserhöhung für Gut 2 in Einkommens- und Substitutionseffekt graphisch!

2. Wie groß ist der mengenmäßige (absolute) Gesamteffekt dieser Preiserhöhung für Gut 2?

3. Ermitteln Sie den mengenmäßigen (absoluten) Einkommens- und Substitutionseffekt für Gut 2!

Lösungsvorschlag

1. Grafik:



- Zunächst zeichnet man die ursprüngliche Budgetgerade einschließlic Haushaltsoptimum ein. Am einfachsten geht dies, in dem man erst das Haushaltsoptimum $\left(x_1^{alt}; x_2^{alt}\right) = (4;4)$ einzeichnet und dann die Gerade mit dem Anstieg $-\frac{p_1}{p_2^{alt}} = -1$ durch den Punkt zeichnet. Man beachte, dass sich Kim maximal 8 Einheiten von Gut 1 leisten kann (nämlich $\frac{m}{p_1} = 8$) und $\frac{m}{2p_1}$ ihre Nachfrage im Haushaltsoptimum ist!
- Die neue Budgetgerade zeichnen ebenso ein: Kims Haushaltsoptimum lautet $(x_1^{neu}; x_2^{neu}) = (4;2)$. Der Anstieg der Geraden ist $-\frac{p_1}{p_2^{neu}} = -\frac{1}{2}$.
- Die Hilfsgerade (für den Substitutionseffekt) hat ebenfalls den Anstieg $-\frac{p_1}{p_2^{neu}} = -\frac{1}{2}$, verläuft aber durch das alte Haushaltsoptimum. Der Hilfspunkt liegt bei $(6;3)$. Die genauen Werte werden in 3.) benötigt, für die Grafik war die grobe Position des Hilfspunktes hinreichend.
- Die Kennzeichnung der Effekte (SE, EE, GE) für Gut 2 (!) erfolgt an den Abschnitten der x_2-Achse!

2. Wir berechnen zunächst die Haushaltsoptima. Der Gesamteffekt für Gut 2 ist dann die Änderung der nachgefragten Menge des Gutes 2:

$$\begin{aligned}
x_1^{alt} &= \frac{8}{2 \cdot 1} = 4 = x_2^{alt} \\
x_1^{neu} &= \frac{8}{2 \cdot 1} = 4 \\
x_2^{neu} &= \frac{8}{2 \cdot 2} = 2 \\
GE &= \Delta x_2 = 2 - 4 = -2
\end{aligned}$$

3. Für den Substitutionseffekt brauchen wir zunächst die entsprechende Budgetrestriktion (bei der sich der Haushalt das alte Optimum leisten kann, gegeben der neuen Preise). Anhand des daraus resultierenden Optimums erkennen wir den Substitutionseffekt. Der Einkommenseffekt ergibt sich dann als Differenz zwischen Gesamteffekt und Substitutionseffekt.

$$\begin{aligned}
m' &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 12 \\
x_2\left(m', p_2^{neu}\right) &= \frac{12}{2 \cdot 2} = 3 \\
SE &= x_2^{hilf} - x_2^{alt} = 3 - 4 = -1 \\
EE &= GE - SE = -2 - (-1) = -1 \\
&= x_2^{neu} - x_2^{hilf} = 2 - 3 = -1
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte) Tinas Stundenlohn beträgt $w = 20$. Das Preisniveau für Konsumgüter beträgt $p = 40$. Tinas Nutzenfunktion lautet $u(F, C) = \sqrt{F} + \sqrt{C}$, wobei F ihre Freizeit und C den Konsum bezeichnet.
Wieviele Stunden wird Tina arbeiten?

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
\frac{w}{p} &= \frac{MU_F}{MU_C} = \sqrt{\frac{C}{F}} = MRS \\
C &= \left(\frac{w}{p}\right)^2 F = \frac{1}{4} F \quad \text{oder} \quad F = 4C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \cdot 24 + p \cdot C^u &= wF + pC \qquad (\text{wobei } C^u = 0) \\
w \cdot 24 &= wF + pC \\
\text{oder} \quad pC &= w(24 - F) \qquad (\text{Konsumausgaben} = \text{Arbeitseinkommen}) \\
24 &= F + \frac{p}{w} C = F + \frac{w}{p} F \\
F &= 24 \frac{p}{p + w} = 24 \cdot \frac{40}{60} = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16 \\
x^* &= (F^*; C^*) = \left(16; \frac{8}{2}\right) = (16; 4) \qquad (C^* \text{ war nicht gefordert})
\end{aligned}$$

Tina arbeitet $24 - 16 = 8$ Stunden (pro Tag).

Hinweise: Eine Transformation der Nutzenfunktion in eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion ist nicht möglich! Die Anwendung der Lösungsformel für diese ist also nicht möglich. - Ebenso ist Quadrieren wenig hilfreich, insbesondere ist $\left(\sqrt{F} + \sqrt{C}\right)^2 \neq F + C$!

Aufgabe 4 (7 Punkte) Die Produktionsfunktion eines Unternehmens lautet $y = f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Für die Faktorpreise gilt $w_2 > 2w_1$.
Ermitteln Sie die Kostenfunktion!

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}\frac{w_1}{w_2} &= \frac{MP_1}{MP_2} = MRTS \\ \frac{w_1}{w_2} &= \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad w_2 \stackrel{!}{=} 2w_1\end{aligned}$$

Wegen $w_2 > 2w_1$ (siehe Aufgabe!) lautet die Randlösung: $(x_1; x_2) = (y, 0)$.

$$\begin{aligned}c(y) &= w_1x_1 + w_2x_2 = w_1x_1 \\ c(y) &= w_1y\end{aligned}$$

Hinweise: Man beachte den Widerspruch zwischen $w_2 \stackrel{!}{=} 2w_1$ und $w_2 > 2w_1$! Es gilt also nicht $c(y) = w_1x_1 + w_2x_2 = w_1x_1 + 2w_1x_2$. (Auch wenn sich dies zu $c(y) = w_1y$ umformen lässt.)

Die Produktionsfaktoren sind perfekte Substitute, nicht perfekte Komplemente. Es gilt also nicht $y = x_1 = 2x_2$.

Die Angabe der Randlösung mit kurzer Begründung (perfekte Substitute etc.) war ebenfalls zielführend.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Die Unternehmen einer Branche befinden sich im vollständigen Wettbewerb. Die Unternehmen dieser Branche haben die folgende langfristige Kostenfunktion,

$$c(y) = \begin{cases} 100 + y^2 & , y > 0, \\ 0 & , y = 0, \end{cases}$$

wobei y die produzierte Menge bezeichnet. Die Marktnachfrage für die Branche ist durch $Y(p) = 10(120 - p)$ gegeben, wobei Y die gesamte nachgefragte Menge und p den Preis bezeichnet. Es herrscht freier Marktzu- und -austritt.

1. Ermitteln Sie die Grenz- und Durchschnittskosten eines einzelnen Unternehmens!
2. Wieviele Unternehmen werden im langfristigen Wettbewerbsgleichgewicht auf diesem Markt agieren?

Lösungsvorschlag

1. $$MC = \frac{dc}{dy} = 2y, \qquad AC = \frac{c(y)}{y} = \frac{100 + y^2}{y}$$

2. Im langfristigen Wettbewerbsgleichgewicht gilt
$$p(Y^*) = AC(y^*) = MC(y^*)$$
wobei Y^* die gesamte in Branche angebotene Menge und y^* die von einem Unternehmen angebotene Menge bezeichnet. Es gilt $Y^* = n^* \cdot y^*$, wobei n^* die Anzahl der im Gleichgewicht am Markt agierendenden Unternehmen bezeichnet. Die Menge y^* bestimmem wir über
$$2y^* = MC(y^*) = AC(y^*) = \frac{100 + y^{*2}}{y^*}$$
und erhalten $y^* = 10$. **,** also
$$p^* = p(Y^*) = MC(y^*) = 2 \cdot 10 = 20.$$
Mit der Marktnachfragefunktion gilt
$$Y^* = n^* \cdot y^* = 10 \cdot (120 - p^*),$$
somit
$$n^* \cdot 10 = 10 \cdot (120 - 20)$$
also $n^* = 100$.

Aufgabe 6 (5 Punkte) Die Nachfrage auf einem Markt sei durch die folgende Nachfragefunktion gegeben $y(p) = 100 - 2p$. Dabei bezeichnet y die gesamte nachgefragte Menge und p den Preis. Die konstanten Grenz- und Durchschnittskosten des Monopolisten an diesem Markt betragen 10.

Welche Menge wird der Monopolist zu welchem Preis anbieten, wenn er nicht preisdiskriminiert?

Lösungsvorschlag

Die Gewinnmaximierungsbedingung für den nicht preisdiskriminierenden Monopolisten lautet $MC\left(y^M\right) = MR\left(y^M\right)$. Über die inverse Nachfragefunktion

$$p(y) = 50 - \frac{y}{2}$$

erhält man den Grenzerlös

$$MR(y) = 50 - y,$$

über

$$MR\left(y^M\right) = 50 - y^M = 10 = MC$$

also $y^M = 40$ und damit

$$p^M = p\left(y^M\right) = 50 - \frac{40}{2} = 30.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Betrachten Sie das folgende Bimatrixspiel, in dem die Auszahlungen des Spielers 1 links und die Auszahlungen des Spielers 2 rechts eingetragen sind:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	$5, 4$	$0, 3$
	unten	$4, 5$	$4, 4$

1. Bestimmen Sie alle dominanten Strategien des obigen Bimatrixspiels!
2. Gibt es ein Nash-Gleichgewicht, in dem Spieler 1 die Strategie *oben* wählt!

Geben Sie jeweils die relevanten Ungleichungen an!

Lösungsvorschlag

1. Es gilt $5 > 4$ aber $0 < 4$, also ist keine der Strategien von Spieler 1 dominant. Weiterhin gilt $4 > 3$ und $5 > 4$, also ist *links* für Spieler 2 dominant und *rechts* nicht.
2. Es gilt $5 > 4$ sowie $4 > 3$, also ist $(oben, links)$ ein Nash-Gleichgewicht.

Aufgabe 8 (8 Punkte) Zur Allmende eines Bergdorfes gehört ein Teich, in dem alle Dorfbewohner angeln dürfen. Das Angeln verursacht keine Kosten. Werden insgesamt A Stunden geangelt, dann werden je Angelstunde $F(A) = 48 - 2A$ Fische gefangen, die zu einem Preis von einem Euro pro Fisch verkauft werden.

1. Wie viele Stunden wird im privaten Optimum geangelt?
2. Welche Anzahl ist gesellschaftlich optimal, maximiert also den Gesamtgewinn des Angelns?

Lösungsvorschlag

1. Es wird so lange geangelt bis der Durchschnittserlös gleich den Grenzkosten ist. Also gilt $1 \cdot (48 - 2A^*) = 0$ für die Angelzeit A^*, d.h. $A^* = 24$.
2. Optimal ist die Angelzeit, die den Gesamterlös (die Kosten sind ja 0) maximiert. Der Gesamterlös bei A Angelstunden beträgt $1 \cdot A(48 - 2A)$. Über die Maximierungsbedingung
$$\frac{d(1 \cdot A(48 - 2A))}{dA} = 48 - 4A^{**} = 0$$
ist dies bei $A^{**} = 12$ der Fall.