Universität Leipzig

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

BACHELOR – PRÜFUNG

DATUM: **28. Juli 2014**

Modul: **Mikroökonomik**

PRÜFER: **Prof. Dr. Harald Wiese**

PRÜFUNGS-NR.:

STUDIENGANG:

NAME, VORNAME:

UNTERSCHRIFT DES STUDENTEN:

ERLÄUTERUNGEN:

Maximal erreichbare Punkte: 80
Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Lesen Sie die Aufgabenstellung vor dem Bearbeiten gründlich!
Schreiben Sie, bitte, leserlich!
Begründen Sie Ihre Antworten!
Machen Sie jeweils Ihren Rechenweg deutlich!
Sollte der Platz unter den Fragen nicht ausreichen,
verwenden Sie bitte jeweils die Rückseite!
Hilfsmittel: keine

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
PUNKTE:												

NOTE: **Unterschrift des Prüfers:**

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Welche der folgenden Nutzenfunktionen repräsentieren dieselben Präferenzen? Begründen Sie (Beweis oder Gegenbeispiel)!

(a) $U_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$

(b) $U_2(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + 1) + \ln(x_2 + 1) + \ln(x_3 + 1)$

(c) $U_3(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$

Lösungsvorschlag:

Es gilt

$$\begin{aligned}\ln(U_1(x_1, x_2, x_3)) &= \ln((x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)) \\ &= \ln(x_1 + 1) + \ln(x_2 + 1) + \ln(x_3 + 1) \\ &= U_2(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(z) = \ln z$ monoton wachsend ist, repräsentieren die Nutzenfunktionen U_1 und U_2 dieselben Präferenzen. Betrachten wir nun die Güterbündel $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$. Es gilt

$$\begin{array}{lll} U_1(0,0,0) = 1, & U_2(0,0,0) = 0, & U_3(0,0,0) = -1, \\ U_1(1,1,1) = 8, & U_2(1,1,1) = 3\ln 2, & U_3(1,1,1) = -8 \end{array}$$

Die Nutzenfunktionen U_1 und U_2 bewerten das Güterbündel $(1, 1, 1)$ also besser als das Güterbündel $(0, 0, 0)$ (der Nutzen ist höher). Dahingegen bewertet die Nutzenfunktion U_3 das Güterbündel $(0, 0, 0)$ besser als $(1, 1, 1)$. Folglich repräsentieren U_1 und U_3 nicht dieselben Präferenzen. Ebenso repräsentieren U_2 und U_3 nicht dieselben Präferenzen.
Bemerkung: Es gilt zwar $U_1(x_1, x_2, x_3) = -U_3(x_1, x_2, x_3)$, die Transformation $f(z) = -z$ ist jedoch nicht monoton wachsend, weshalb dies kein Beweis dafür ist, dass U_1 und U_3 dieselben Präferenzen repräsentieren.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Bestimmen Sie das optimale Güterbündel bei gegebenem Einkommen m und Preisen p_1 beziehungsweise p_2 desjenigen Haushaltes, dessen Präferenzen durch die folgende Nutzenfunktion gegeben ist:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1+x_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x_2}}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort hinreichend!
Lösungsvorschlag:

Die Nutzenfunktion ist monoton fallend sowohl in x_1 als auch in x_2. Beide Güter sind dementsprechend Ungüter. Das Haushaltsoptimum ist daher gegeben durch $O = (0, 0)$. Der Haushalt wird sein Einkommen nicht für den Konsum ausgeben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Haushalt verfüge über ein Einkommen in Höhe von m. Seine Nutzenfunktion sei durch

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$$

gegeben. Der Preis für das erste Gut wird mit p_1 und der Preis für das zweite Gut mit p_2 bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie für Gut 1 analytisch die Engelkurve!

(b) Bestimmen Sie für Gut 1 die Einkommenselastizität der Nachfrage! Wie ist demnach das Gut zu klassifizieren?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Engelkurve beschreibt den Zusammenhang zwischen Budget und der im Haushaltsoptimum konsumierten Menge des Gutes. Im Haushaltsoptimum gilt $x_1 = 2x_2$, also $x_2 = \frac{1}{2}x_1$. Setzen wir dies in die Budgetgerade ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} m &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ &= p_1 x_1 + p_2 \frac{1}{2} x_1 \end{aligned}$$

und somit die Engelkurve für Gut 1

$$m(x_1) = \left(p_1 + \frac{p_2}{2}\right) x_1$$

beziehungsweise

$$x_1(m) = \frac{2m}{2p_1 + p_2}.$$

(b) Die Einkommenselastizität der Nachfrage ist definiert als

$$\varepsilon_{x_1,m} = \frac{\partial x_1}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_1}.$$

Aus Aufgabenteil (a) nutzen wir die im Optimum konsumierte Menge von Gut 1 $x_1 = \frac{2m}{2p_1+p_2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1,m} &= \frac{2}{2p_1 + p_2} \cdot \frac{m}{x_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da die Elastizität positiv ist, lässt sich folgern, dass es sich bei Gut 1 um ein normales Gut handelt.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Michael, Sebastian und Clara werden Lose angeboten, die ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.03 einen Gewinn von € 100, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.15 einen Gewinn von € 10 und mit der Wahrscheinlichkeit von 0.82 eine Niete erbringt. Das Los kostet € 5.

(a) Michael ist risikoavers. Können Sie entscheiden, ob Michael ein Los kaufen wird?

(b) Sebastians Nutzenfunktion ist gegeben durch $u(X) = 5X + 1$. Wird er ein Los kaufen?

(c) Wird die risikofreudige Clara ein Los kaufen?

Lösungsvorschlag:

Die Lotterie ist gegeben durch

$$L = [100, 10, 0; 0.03, 0.15, 0.82].$$

Die Teilnahme kostet 5 €, daher ist der erwartete Nutzen der Lotterie mit dem Nutzen der 5 € zu vergleichen. Es gilt $E(L) = 100 \cdot 0.03 + 10 \cdot 0.15 + 0 \cdot 0.82 = 4,5$

(a) Risikoaversion bedeutet, dass der Erwartungswert der Lotterie vorgezogen wird, $E_u(L) < u(E(L))$. Da der Erwartungswert 4.5 beträgt und damit unter dem Lospreis von 5 liegt, erhalten wir

$$E_u(L) < u(E(L)) < u(5).$$

Die 5 € sind Michael folglich mehr wert als die Lotterie. Er wird nicht spielen. Eine altenative Begründung bestünde darin, dass das Sicherheitsäquivalent für risikoaverse Individuen unter dem Erwartungswert 4.5 und damit auch unter dem Lospreis von 5 liegt, $CE(L) < E(L) < 5$.

(b) Da eine lineare Nutzenfunktion gegeben ist, handelt es sich folglich um ein risikoneutrales Individuum. Es gilt damit:

$$E_u(L) = u(E(L)) < u(5),$$

auch Sebastian wählt die 5 € statt der Lotterie. Eine altenative Begründung bestünde darin, dass das Sicherheitsäquivalent für risikoneutrale Individuen gleich dem Erwartungswert 4.5 ist und damit unter dem Lospreis von 5 liegt, $CE(L) = E(L) < 5$.

(c) Für risikofreudige Individuen gilt $E_u(L) > u(E(L))$. Damit kann ohne eine konkrete Nutzenfunktion nicht entschieden werden, ob Clara die Lotterie spielt, denn aus der obigen Ungleichung geht nicht hervor, ob $E_u(L) < u(5)$ (Clara spielt nicht) oder $E_u(L) > u(5)$ (Clara spielt) gilt. Alternativ ist eine Begündung mit Hilfe des Sicherheitsäquivalentes möglich.

Bemerkung: Es kann auch mit der Lotterie $L = [95, 5, -5; 0.03, 0.15, 0.82]$ gearbeitet werden. In diesem Fall ist der Nutzen dieser Lotterie mit dem Nutzen von 0 (Inaktivität) zu vergleichen.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Betrachten Sie die Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Die Faktorpreise sind $w_1 = 4$ und $w_2 = 1$. Bestimmen Sie die langfristige Kostenfunktion!

Lösungsvorschlag:

Optimaler Einsatz der Produktionsfaktoren impliziert, dass

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial w_1}}{\frac{\partial y}{\partial w_2}} = \frac{x_2}{x_1} \stackrel{!}{=} \frac{4}{1} = \frac{w_1}{w_2}$$

erfüllt ist. Wir substituieren die Bedingung $x_2(x_1) = 4x_1$ in die Produktionsfunktion

$$y = x_1 x_2 = x_1(4x_1) = 4x_1^2$$

und lösen diesen Ausdruck nach x_1 auf,

$$x_1(y) = \frac{\sqrt{y}}{2},$$

wobei wir eine Lösung der quadratischen Gleichung aufgrund der Nichtnegativität von y ausschließen. Durch Einsetzen in die Optimalitätsbedingung erhalten wir

$$x_2(y) = 4x_1(y) = 2\sqrt{y}$$

Es ergibt sich also die langfristige Kostenfunktion

$$\begin{aligned} C(y) &= w_1 x_1(y) + w_2 x_2(y) \\ &= 4\frac{\sqrt{y}}{2} + 1 \cdot 2\sqrt{y} \\ &= 4\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (11 Punkte)
In einer Tauschökonomie mit zwei Gütern hat Akteur A die Nutzenfunktion

$$u_A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A + x_2^A$$

und Akteur B die Nutzenfunktion

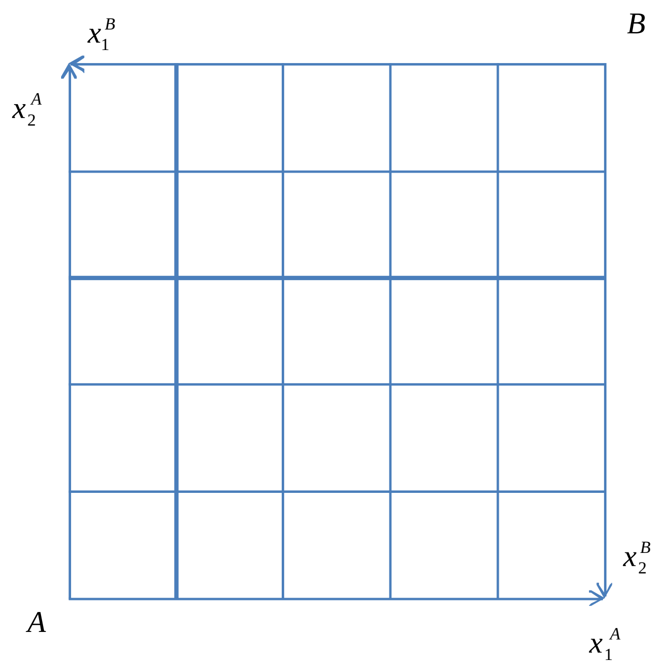
$$u_B(x_1^B, x_2^B) = 2x_1^B x_2^B.$$

Die Anfangsausstattungen sind gegeben durch $\omega^A = (40, 10)$ beziehungsweise $\omega^B = (10, 40)$.

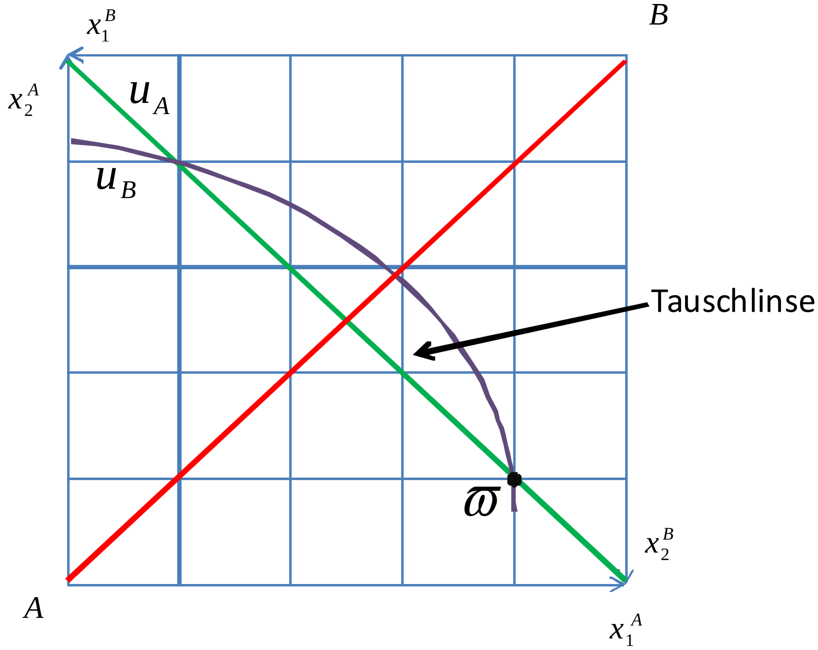
(a) Zeichnen Sie die Tausch-Edgeworth-Box zu dieser Situation möglichst exakt in das beigefügte Raster ein! Beschriften Sie die eingezeichneten Objekte hinlänglich! Ihre Zeichnung sollte zumindest die folgenden Objekte abbilden:

- die Anfangsausstattungen ω^A beziehungsweise ω^B der beiden Akteure;
- die Indifferenzkurve für jeden Akteur, die durch die Anfangsausstattung verläuft;
- die Bessermenge des Akteurs A bezüglich der Anfangsausstattung (das ist die Menge aller Punkte $\left(x_1^A, x_2^A\right)$, für die $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) \geq u^A\left(\omega_1^A, \omega_2^A\right)$ gilt)
- die Tauschlinse

(b) Bestimmen Sie die Kontraktkurve und zeichnen Sie sie zusätzlich in die Tausch-Edgeworth-Box ein. Begründen Sie Ihre Herleitung ausführlich!



Lösungsvorschlag:



(a) siehe Grafik; die Bessermenge von Agent A befindet sich rechts und oberhalb der Indifferenzkurve von Agent A.

(b) Da es sich bei beiden Agenten um monotone und konvexe Präferenzen handelt, lässt sich die Kontraktkurve über den Ansatz

$$MRS_A \stackrel{!}{=} MRS_B$$

bestimmen. Es ergibt sich

$$\frac{1}{1} \stackrel{!}{=} \frac{2x_2^B}{2x_1^B}$$

und somit $x_1^B = x_2^B$. Die Kontraktkurve ist somit gegeben durch die Ursprungsgerade.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Auf einem Markt mit vollkommener Konkurrenz bieten zwei Typen von Unternehmen, A und B, dasselbe Gut an. Die Unternehmen vom Typ A haben die Kostenfunktion $C_A(y_A) = 8y_A$, die Unternehmen vom Typ B die Kostenfunktion $C_B(y_B) = 6y_B$.
Welcher Preis stellt sich im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht ein?
Lösungsvorschlag:
Wir ermitteln für jeden Unternehmenstyp das Minimum der Durchschnittskosten:

$$\begin{aligned} AC_A^{\min} &= \min_{0 \leq y_A} \frac{C_A(y_A)}{y_A} = \min \frac{8y_A}{y_A} = 8 \\ AC_B^{\min} &= \min_{0 \leq y_B} \frac{C_B(y_B)}{y_B} = \min_{0 \leq y_B} \frac{6y_B}{y_B} = 6 \end{aligned}$$

Im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht werden nur Unternehmen das Typs B anbieten und dies zum Minimum ihrer Durchschnittskosten,

$$p = AC^{\min} = AC_B^{\min} = 6.$$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Ein Monopolist mit der Kostenfunktion

$$C(y) = 2y + 2$$

steht einer aggregierten Marktnachfrage von

$$D(p) = 10 - 2p$$

gegenüber.

Wie hoch ist der Gewinn des Monopolisten, wenn er Preisdiskriminierung ersten Grades betreibt? (Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an!)

Lösungsvorschlag:

Für einen Monopolisten, der Preisdiskriminierung ersten Grades betreibt, der also von jedem Konsumenten einen Preis in Höhe seiner Zahlungsbereitschaft verlangt, ist der Grenzerlös gleich dem Preis. Die Gewinnmaximierungsbedingung lautet dann Preis=Grenzkosten. Ausgehend von der vorgenannten Kostenfunktion erhalten wir die (konstanten) Grenzkosten

$$MC(y) = 2$$

und aus der Nachfragefunktion gewinnt man durch einfaches Auflösen die inverse Nachfragefunktion

$$p(y) = 5 - \frac{y}{2}.$$

Die Gewinnmaximierungsbedingung lautet damit

$$5 - \frac{y}{2} = 2,$$

die gewinnmaximierende Menge beträgt also

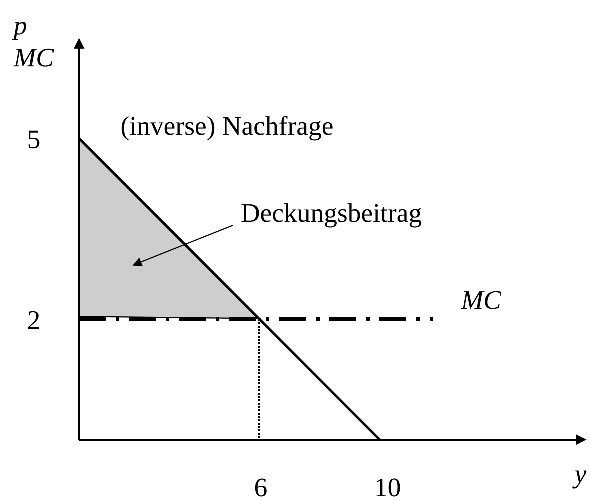
$$y^M = 6.$$

Die Abbildung stellt diese Situation dar: Der Deckungsbeitrag des Monopolisten entspricht der grau unterlegten Fläche und beträgt mit der Dreiecksflächenformel

$$A = \frac{1}{2} \cdot (5 - 2) \cdot 6 = 9$$

Zur Ermittlung des Gewinns GM sind jetzt nur noch die Fixkosten (F = 2) abzuziehen:

$$\Pi = 9 - 2 = 7.$$



Aufgabe 9 (6 Punkte)
In der folgenden Matrix gibt der erste Eintrag einer jeden Zelle die jeweilige Auszahlung des Zeilenwählers und der zweite Eintrag die jeweilige Auszahlung des Spaltenwählers bei der entsprechenden Strategiekombination an.

		Spieler 2	
		l	r
Spieler 1	o	$(4,8)$	$(8,2)$
	u	$(5,1)$	$(7,0)$

a) Ist die Strategiekombination (o,l) ein Nash-Gleichgewicht? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

b) Ist für den Spaltenwähler Strategie l eine dominante Strategie? Begründen Sie, indem Sie die relevante(n) Ungleichung(en) angeben!

Lösungsvorschlag:

a) Nein, für Spieler 1 lohnt sich das abweichen, denn $4 < 5$

b) Es handelt sich um eine dominante Strategie, denn $8 > 2$ und $1 > 0$.

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Drei Telekommunikationsunternehmen wollen einen gemeinsamen Satelliten ins All schicken, um Daten über große Entfernungen zu übertragen. Für die Übertragung wird in den Satelliten mindestens ein Transponder eingebaut, der von allen Unternehmen nutzbar ist. Die Zahlungsbereitschaft jedes Unternehmens für jeden weiteren Transponder, der eingebaut wird, ist 5 Millionen Euro. Die Kosten für das Gesamtprojekt hängen von der Anzahl der Transponder (x) ab gemäß $C(x) = x^2 + 3x$ (in Millionen Euro). Bestimmen Sie die Pareto-optimale Anzahl der eingebauten Transponder!

Lösungsvorschlag:

Die Pareto-optimale Anzahl bestimmt sich über den Ansatz

$$\sum_i MZB_i \stackrel{!}{=} MC.$$

Wir haben

$$\sum_i MZB_i = 3 \cdot 5 = 15$$

und

$$MC = \frac{\partial C}{\partial x} = 2x + 3,$$

womit sich ergibt:

$$15 = 2x + 3,$$

also $x = 6$.

Aufgabe 11 (11 Punkte)
Auf einem Markt agieren zwei Unternehmen im simultanen Mengenwettbewerb. Die inverse Nachfragefunktion sei durch $p(Y) = 24 - 2Y$ gegeben, wobei $Y = y_1 + y_2$ die aggregierte Ausbringungsmenge der Unternehmen ist. Beide Unternehmen betreiben Gewinnmaximierung. Das erste Unternehmen besitzt die Kostenfunktion $C_1(y_1) = 2 \cdot y_1^2$. Unternehmen 2 hat konstante Durchschnittskosten in Höhe von 4.

(a) Bestimmen Sie die Reaktionsfunktionen der beiden Unternehmen!

(b) Bestimmen Sie das Cournot-Nash-Gleichgewicht auf diesem Markt!

Lösungsvorschlag

(a) Wir beginnen mit Unternehmen 1. Ausgehend von dessen Gewinnfunktion

$$\begin{aligned}\pi_1(y_1, y_2) &= p(y_1 + y_2)\, y_1 - C_1(y_1) \\ &= (24 - 2(y_1 + y_2)) \cdot y_1 - 2 \cdot y_1^2\end{aligned}$$

erhalten wir über die Maximierungsbedingung

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = 24 - 4y_1 - 2y_2 - 4y_1 = 0$$

die Reaktionsfunktion

$$y_1^R(y_2) = 3 - \frac{y_2}{4}.$$

Analog erhält man für Unternehmen 2:

$$\begin{aligned}\pi_2(y_1, y_2) &= p(y_1 + y_2)\, y_2 - 4 \cdot y_2 \\ &= (24 - 2(y_1 + y_2))\, y_2 - 4 \cdot y_2 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial y_2} &= -4y_2 + 20 - 2y_1 = 0 \\ y_2^R(y_1) &= 5 - \frac{y_1}{2}\end{aligned}$$

(b) Das Cournot-Gleichgewicht ermittelt man schließlich durch „Einsetzen der beiden Reaktionsfunktionen ineinander“:

$$\begin{aligned}y_1^C &= y_1^R\left(y_2^R\left(y_1^C\right)\right) \\ &= 3 - \frac{y_2\left(y_1^C\right)}{4} \\ y_1^C &= 3 - \frac{5 - \frac{y_1^C}{2}}{4} \\ 8y_1^C &= 24 - 10 + y_1^C \\ 7y_1^C &= 14 \\ y_1^C &= 2.\end{aligned}$$

Einsetzen in y_2^R ergibt

$$y_2^C = y_2^R\left(y_1^C\right) = 5 - \frac{y_1^C}{2} = 5 - \frac{2}{2} = 4.$$