Mikroökonomik

Unsicherheit

Harald Wiese

Universität Leipzig

Gliederung

Beschreibung der Ausgangssituation

Entscheidungen bei Unsicherheit

- Sicherheit: Vollkommene Information über alle entscheidungsrelevanten Parameter
- Unsicherheit: Das Ergebnis hängt auch von einem Umweltzustand ab.
  - Risiko: Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt
  - Ungewissheit: Wahrscheinlichkeitsverteilung unbekannt

Beschreibung der Ausgangssituation

Auszahlung (Geldbetrag oder Nutzenwert) hängt ab von

- der gewählten Aktion und
- einem Umweltzustand.

		Umweltzustand	
		schlechtes Wetter	gutes Wetter
Aktion	Regenschirm-produktion	100	81
	Sonnenschirm-produktion	64	121

Überblick

- Beschreibung der Ausgangssituation
- Entscheidungen bei Ungewissheit
- Entscheidungen bei Risiko
  - Bayes-Regel und Bernoulli-Prinzip
  - Das St. Petersburger Paradoxon (Exkurs)
- Begründung des Bernoulli-Prinzips
- Risikoaversion, Risikoneutralität und Risikofreude
- Die Nachfrage nach Versicherung
- Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie

Entscheidungen bei Ungewissheit

- Maximin-Regel
- Maximax-Regel
- Hurwicz-Regel
- Regel des minimalen Bedauerns
- Laplace-Regel

- Bestimme für jede Alternative das schlechteste Ergebnis (Zeilenminimum)!
- Wähle die Alternative mit dem höchsten Zeilenminimum!

Problem

Welches Produkt (Regen- oder Sonnenschirm) wird bei Anwendung der Maximin-Regel ausgewählt?

- Bestimme für jede Alternative das beste Ergebnis (Zeilenmaximum)!
- Wähle die Alternative mit dem höchsten Zeilenmaximum!

Problem

Welches Produkt (Regen- oder Sonnenschirm) wird bei Anwendung der Maximax-Regel ausgewählt?

- Zeilenmaximum wird mit dem Faktor γ und das Zeilenminimum mit dem Faktor $1-\gamma$ mit $0 \leq \gamma \leq 1$ gewichtet.
- Es wird die Alternative mit dem höchsten gewogenen Durchschnitt gewählt.

Problem

Für $\gamma = 1$ geht die Hurwicz-Regel in die ...-Regel und für $\gamma = 0$ in die ...-Regel über.

Problem

Welches Produkt (Regen- oder Sonnenschirm) wird bei Anwendung der Hurwicz-Regel ausgewählt, wenn der Optimismusparameter $\frac{3}{4}$ beträgt?

Entscheidungen bei Ungewissheit

Regel des minimalen Bedauerns

- Die Ergebnismatrix wird in die Bedauernsmatrix überführt.
- Die Elemente der Bedauernsmatrix messen den Nachteil, der aus einer Fehleinschätzung des Umweltzustandes resultiert:
  Jedes Element einer Spalte wird durch seine betragsmäßige Differenz zum Spaltenmaximum ersetzt.
- Wähle die Alternative, die das maximale Bedauern minimiert!

Problem

Welches Produkt (Regen- oder Sonnenschirm) wird bei Anwendung der Regel des minimalen Bedauerns ausgewählt?

- Die Ungewissheit wird wie eine Risikosituation behandelt; alle Umweltzustände werden als gleichwahrscheinlich erachtet.
- Wähle die Alternative mit dem maximalen Erwartungswert!

Problem

Welches Produkt (Regen- oder Sonnenschirm) wird bei Anwendung der Laplace-Regel ausgewählt?

Bei Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ für gutes Wetter führt Regenschirmproduktion zur Wahrscheinlichkeitsverteilung für Auszahlungen = Lotterie

$$L_{\text{Regenschirm}} = \left[100, 81; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

Und Sonnenschirmproduktion?
Allgemeine Schreibweise für Lotterien:

$$L = [x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n].$$

wobei

- $p_i \geq 0$ und
- $p_1 + ... + p_n = 1$

gelten.

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen können selbst wieder Wahrscheinlichkeitsverteilungen als „Auszahlung" enthalten.
- Zusammengesetzte Verteilung:

$$\left[L_1, L_2; p_1, p_2\right]$$

Problem

$L_1 = \left[0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *und* $L_2 = \left[5, 10; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.
Zusammengesetzte Verteilung $L_3 = \left[L_1, L_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *als einfache Verteilung?*

- Erwartungswert für eine Verteilung $L = [x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n]$:

$$E(L) = p_1 x_1 + ... + p_n x_n.$$

- Bayes-Regel:
  Wähle unter den möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diejenige mit dem höchsten Erwartungswert.

Entscheidungen bei Risiko

Bayes-Regel

Problem

Welches Produktionsgut wählt der Unternehmer, der die Bayes-Regel befolgt und annimmt, dass die Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter $\frac{3}{4}$ beträgt?

Problem

Hätten Sie lieber $L_1 = \left[100, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *oder* $L_2 = [50; 1]$?

Problem

Ziehen Sie L_1 *der Lotterie* $L_3 = [40; 1]$ *vor?*

Entscheidungen bei Risiko

Bayes-Regel

- Positiv: relativ einfache Handhabbarkeit
- Negativ: keine Vereinbarkeit mit typischen Verhaltensmustern

$\Rightarrow$ Anwendung des Bernoulli-Prinzips

Entscheidungen bei Risiko

Bernoulli-Prinzip

- Erwartungsnutzen bei gegebener vNM-Nutzenfunktion $u(x)$ für eine Verteilung $L = [x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n]$:

$$E_u(L) = p_1 u(x_1) + ... + p_n u(x_n)$$

- Bernoulli-Prinzip:
  Wähle diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem höchsten erwarteten Nutzen.

Problem

Welches Gut wird bei vNM-Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$ und Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter $\frac{3}{4}$ produziert?

- Peter wirft eine faire Münze solange, bis Kopf zum ersten Mal erscheint.
- Waren n Würfe erforderlich, zahlt er an Paul einen Betrag der Höhe 2^n.
- stochastische Unabhängigkeit gegeben, also Wahrscheinlichkeit für Kopf beim n-ten Wurf ist $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Problem

Schreiben Sie die St. Petersburger Lotterie auf! Addieren sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins?

- Man erhält für den erwarteten Gewinn der Lotterie L:

$$E\left(L\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = 1 + 1 + \ldots = \infty.$$

- Bayes-Kriterium: Paul müsste jeden Preis akzeptieren, den Peter für die Durchführung dieses Spiels verlangt.
- Befragungen ergeben, dass nur sehr wenige Menschen einen Betrag von 10 oder 20 zu bieten bereit sind.

Entscheidungen bei Risiko

Das St. Petersburger Paradoxon (Exkurs)

- Lösung: Bernoulli-Prinzip unter Verwendung des natürlichen Logarithmus als Nutzenfunktion:

$$E_{\ln}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2^n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{\text{schwierig}}{=} 2 \ln 2$$

- Dann hat die St. Petersburger Lotterie einen Wert CE, der ... (siehe weiter hinten)

Begründung des Bernoulli-Prinzips

- Annahme: Das Individuum verfügt über eine Präferenzrelation $\succeq$ für Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
- Im Folgenden: Beschränkung der Präferenzen durch Axiome $\Longrightarrow$ Herleitung des Bernoulli-Prinzips

Problem

Was besagen die Axiome der Vollständigkeit und der Transitivität in der Präferenztheorie für Güterbündel?

Präferenzaxiome

- **Vollständigkeitsaxiom:** Zwei Lotterien L_1, L_2. $\Rightarrow$

$$L_1 \succsim L_2 \text{ or } L_2 \succsim L_1$$

- **Transitivitätsaxiom:** Annahme $L_1 \succsim L_2$ und $L_2 \succsim L_3$. $\Rightarrow$

$$L_1 \succsim L_3$$

- **Stetigkeitsaxiom:** Annahme $L_1 \succsim L_2 \succsim L_3$. $\Rightarrow$ Es gibt ein $p \in [0, 1]$ so, dass

$$L_2 \sim [L_1, L_3; p, 1-p]$$

- **Unabhängigkeitsaxiom:** Annahme L_1, L_2, L_3 und $p > 0$. $\Rightarrow$

$$[L_1, L_3; p, 1-p] \precsim [L_2, L_3; p, 1-p] \Leftrightarrow L_1 \precsim L_2.$$

Ist das Stetigkeitsaxiom plausibel?

Annahme:

- L_1 – Auszahlung von 10 €
- L_2 – Auszahlung von 0 €
- L_3 – sicherer Tod

$$L_1 \succ L_2 \succ L_3$$

Bestimmen Sie p, sodass

$$L_2 \sim [L_1, L_3; p, 1-p]$$

$p = 1 \Rightarrow [L_1, L_3; 1, 0] = L_1 \succ L_2.$

Betrachten Sie die Lotterien

$$L_1 = \left[12 \cdot 10^6, 0; \tfrac{10}{100}, \tfrac{90}{100}\right] \qquad L_3 = \left[1 \cdot 10^6; 1\right]$$
$$L_2 = \left[1 \cdot 10^6, 0; \tfrac{11}{100}, \tfrac{89}{100}\right] \qquad L_4 = \left[12 \cdot 10^6, 1 \cdot 10^6, 0; \tfrac{10}{100}, \tfrac{89}{100}, \tfrac{1}{100}\right]$$

- Lieber L_1 oder L_2?
- Lieber L_3 oder L_4?

siehe Skript Advanced Microeconomics

Eine Nutzenfunktion für Lotterien

vNM-Nutzenfunktion

Theorem

Präferenzen zwischen Lotterien gehorchen den vier Axiomen genau dann, falls es eine vNM-Nutzenfunktion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *so gibt, dass*

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow E_u(L_1) \geq E_u(L_2)$$

für alle Lottterien L_1 *und* L_2 *gilt.* E_u *(oder:* u*) repräsentiert Präferenzen* $\succsim$ *auf der Menge der Lotterien;*

- u – vNM-Nutzenfunktion mit Definitionsbereich: Auszahlungen
- E_u – erwarteter Nutzen mit Definitionsbereich: Lotterien

Eine Nutzenfunktion für Lotterien

Transformationen

Definition

u vNM-Nutzenfunktion. v wird eine affine Transformation von u genannt, falls $v(x) = a + bu(x)$ for $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ gilt.

Lemma

Falls u Präferenzen $\succsim$ für Lotterien repräsentiert, gilt dies auch für jede affine Transformation von u.

Problem

Möglichst einfache affine Transformation von $u(x) = 100 + 3x + 9x^2$?

Risikoaversion, Risikoneutralität und Risikofreude

L irgend eine nicht-triviale Lotterie. Präferenzen heißen

- risikoneutral bei

$$L \sim [E(L); 1] \text{ oder } E_u(L) = u(E(L))$$

- risikoavers bei

$$L \prec [E(L); 1] \text{ oder } E_u(L) < u(E(L))$$

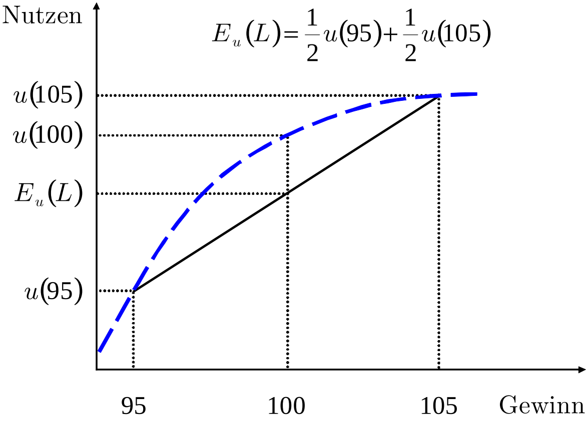
- risikofreudig bei

$$L \succ [E(L); 1] \text{ oder } E_u(L) > u(E(L))$$

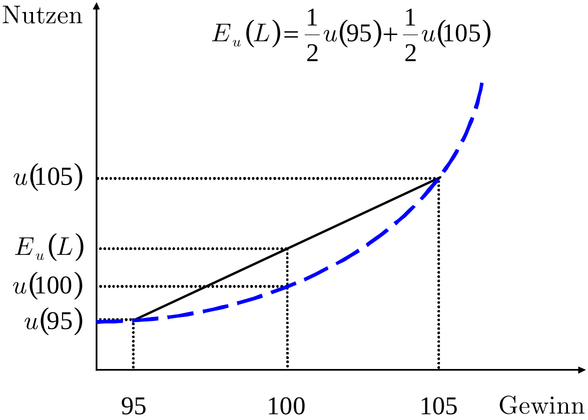
Problem

Ist die Bayes-Regel ein Spezialfall des Bernoulli-Prinzips?

Risikoaversion



Risikofreude



Die Nachfrage nach Versicherung

- Ein Haushalt verfügt über ein Anfangsvermögen von A.
- Mit der Wahrscheinlichkeit p verliert der Haushalt einen Betrag D mit $D \leq A$.
- Eine Versicherung zahlt im Schadensfall $K \leq D$.
- Die Versicherungsprämie beträgt $P = \gamma K$ mit $0 < \gamma < 1$.
- Welchen Versicherungsbetrag K soll der Haushalt wählen?

Die Nachfrage nach Versicherung

Die Budgetgerade

- x_1 = Vermögen bei Eintritt des Schadens:

$$x_1 = A - D + K - P = A - D + (1 - \gamma) K$$

- x_2 = Vermögen ohne Schadenseintritt:

$$x_2 = A - P = A - \gamma K$$

- Nach Umformungen erhält man die Budgetgleichung

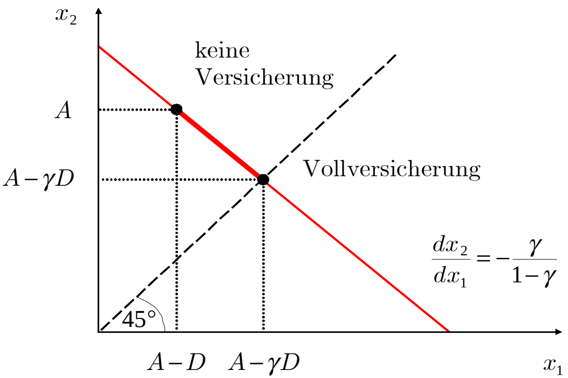
$$\frac{\gamma}{1-\gamma} x_1 + x_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma} (A - D) + A.$$

Problem

Bestimmen Sie die Steigung der Budgetgeraden! Wie lässt sie sich ökonomisch interpretieren?

Die Nachfrage nach Versicherung

Die Budgetgerade



Problem

Interpretieren Sie die dünn gezeichneten Teile der Budgetgeraden!

$$U(x_1, x_2) = E_u([x_1, x_2; p, 1-p]) = pu(x_1) + (1-p)\,u(x_2)$$

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p}{1-p}\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)}.$$

Problem

Risikoscheu $\Rightarrow$ konvexe Präferenzen?

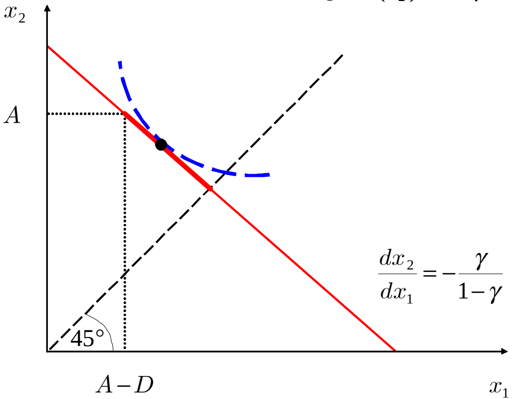
Problem

MRS entlang der 45°-Linie?

Problem

Je höher p, desto ... die Indifferenzkurven.

Im Optimum gilt: $\frac{p}{1-p}\,\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} \overset{!}{=} \frac{\gamma}{1-\gamma}$



Die Nachfrage nach Versicherung

Haushaltsoptimum

- Im Hauhaltsoptimum muss gelten:

$$\frac{p}{1-p}\frac{u'(x_1)}{u'(x_2)} \stackrel{!}{=} \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

- Durch Umformungen erhält man

$$\frac{u'(A-D+(1-\gamma)K)}{u'(A-\gamma K)} = \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{1-p}{p}.$$

Problem

Benjamin besitzt eine Yacht im Wert von € 100.000, 00*.*
$p = 0,01$
$\gamma = 0,02$
vNM-Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$

Optimale Versicherungssumme?

Die Nachfrage nach Versicherung

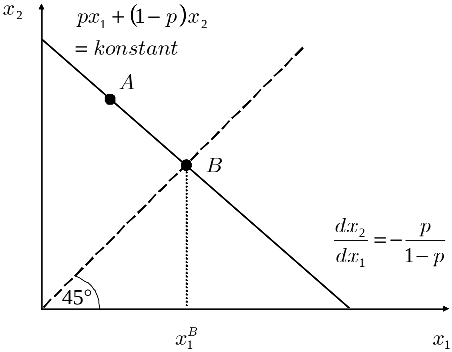
Faire Versicherung: Erwartete Leistungen des Versicherers entsprechen genau der Versicherungsprämie:

$$pK = P.$$

Also

$$\gamma = ?$$

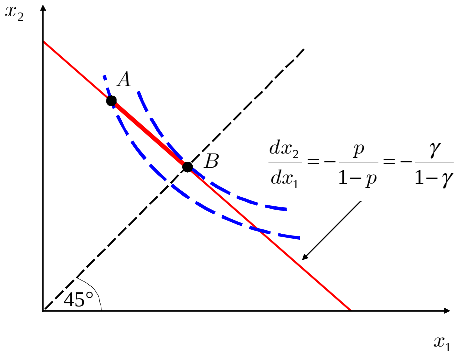
Die Kurve konstanten Erwartungswerts



$$\begin{aligned} E\,(\text{Lotterie } A) &= px_1^B + (1-p)\,x_2^B \\ &= px_1^B + (1-p)\,x_1^B = x_1^B. \end{aligned}$$

Die Nachfrage nach Versicherung

Vollversicherung bei fairer Versicherung

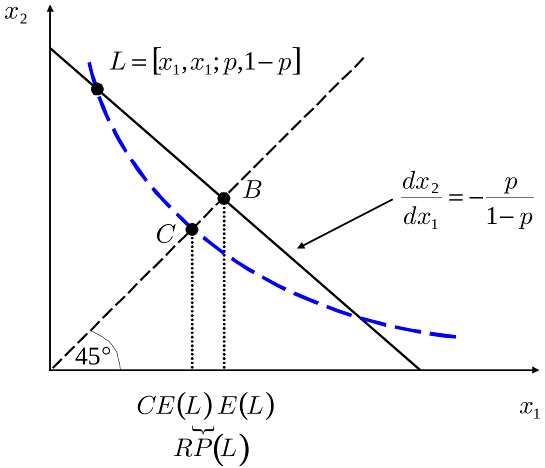


- Faire Versicherung:
  $\gamma = p$, d.h.
  Kurve konstanten Erwartungswertes
  $=$ Budgetgerade
- Risikoaversion heißt:
  Lieber Erwartungswert der Lotterie
  als die Lotterie selbst

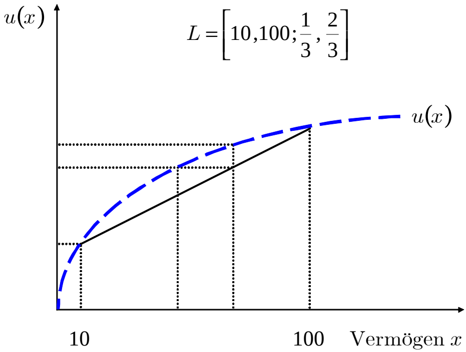
Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie

- Lotterie L
  Sicherheitsäquivalent $CE\left(L\right)$:
  $$L \sim \left[CE\left(L\right);1\right]$$
  oder
  $$E_u\left(L\right) = u\left(CE\left(L\right)\right).$$
  Sicherheitsäquivalent: Welcher sicherer Betrag ist dem Individuum so viel wert wie die Lotterie?
- Risikoprämie $RP\left(L\right)$:
  $$RP\left(L\right) = E\left(L\right) - CE\left(L\right)$$
  Risikoprämie: Wie viel ist das Individuum bereit zu zahlen dafür, dass ihm das Risiko abgenommen wird?

Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie



Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie



Problem

Erwartungswert?
Erwarteter Nutzen?
Nutzen des Erwartungswertes?
Sicherheitsäquivalent?
Risikoprämie?

- Unter Verwendung des natürlichen Logarithmus als Nutzenfunktion erhält man erwarteten Nutzen der St. Petersburger Lotterie (siehe vorne) als

$$E_{\ln}(L) = (\ln 2) \cdot 2$$

- Dann hat die St. Petersburger Lotterie einen Wert CE, der implizit durch

$$1 \cdot \ln(CE) = E_{\ln}([CE; 1]) \overset{!}{=} (\ln 2) \cdot 2$$

gegeben und daher explizit durch

$$CE = e^{\ln(CE)} \overset{!}{=} e^{(\ln 2)\cdot 2} = \left(e^{(\ln 2)}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Aufgabe G.9.1.

		Umweltzustand links	Umweltzustand rechts
Aktion	oben	10	8
Aktion	unten	4	12

Welche Aktion wird der Entscheider wählen, wenn er

a) der Maximin-Regel folgt?

b) der Maximax-Regel folgt?

c) die Hurwicz-Regel mit $\gamma = \frac{3}{4}$ (Optimismusparameter) anwendet?

d) die Regel des minimalen Bedauerns nutzt?

e) die Laplace-Regel nutzt?

Zentrale Hörsaalübungen II

Aufgabe G.9.2.
Zwei Lotterien

$$\begin{aligned} L_1 &= \left[100, 0; \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right] \\ L_2 &= \left[100, 25; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]. \end{aligned}$$

$L_3 = \left[L_1, L_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ als einfache Lotterie?

Aufgabe G.9.3.
Risikoaversion?

a) $u(x) = x^2$ für $x > 0$;
b) $u(x) = 2x + 3$;
c) $u(x) = \ln(x)$ für $x > 0$;
d) $u(x) = -e^{-x}$.

Zentrale Hörsaalübungen III

Aufgabe G.9.4.
vNM-Nutzenfunktion $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$ mit Vermögen x
Einkommen 10
Gewinn/Verlust von 6 mit Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$

- Stellen Sie die Situation als Lotterie dar!
- Erwartungswert der Lotterie?
- Sicherheitsäquivalent?

Aufgabe G.9.5.
vNM-Nutzenfunktion $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$
Zwei Lotterien

$$L_1 = \left[100, 0; \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right], L_2 = \left[100, 25; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right].$$

a) Welche Lotterie ist besser?
b) Sicherheitsäquivalent der zweiten Lotterie?

Zentrale Hörsaalübungen IV

Aufgabe G.9.6.
vNM-Nutzenfunktion $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$
Anfangsvermögen € 144
Drohender Vermögensschaden in Höhe von € 108
Wahrscheinlichkeit für Schaden $\frac{1}{3}$

- Erwarteter Nutzen?
- Risikoprämie?