Mikroökonomik

Das Haushaltsoptimum

Harald Wiese

Universität Leipzig

Gliederung

Überblick

- Maximierungsproblem des Haushalts
- Marginale Zahlungsbereitschaft versus marginale Opportunitätskosten
- Streng konvexe Präferenzen
- Lagrange-Ansatz (Exkurs)
- Konkave Präferenzen
- Perfekte Komplemente
- Bekundete Präferenzen
- Die Ausgabenfunktion

Maximierungsproblem des Haushalts

Haushaltsoptimum $=$

- Güterkombination, die den
- **Nutzen** des Haushalts
- unter **Einhaltung seines Budgets**

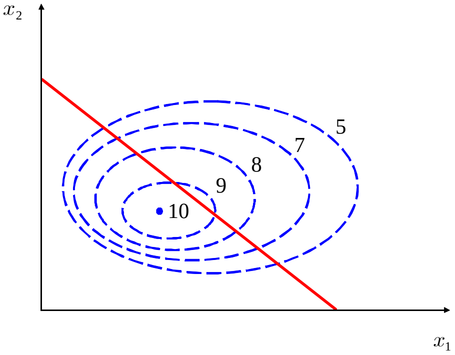
maximiert:

$$\max_{x_1,x_2} U(x_1,x_2)$$
$$\text{u. d. N. } p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$$

bzw. bei Anfangsausstattung

$$\text{u. d. N. } p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$

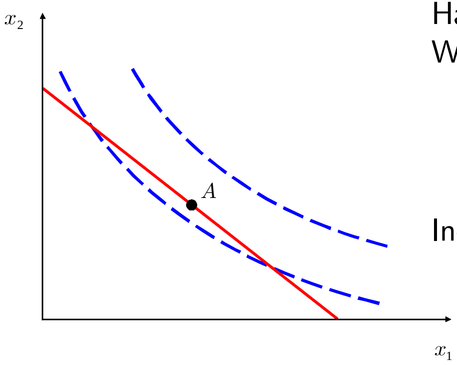
Maximierungsproblem des Haushalts



Problem

Welche Güterkombination ist das Haushaltsoptimum?

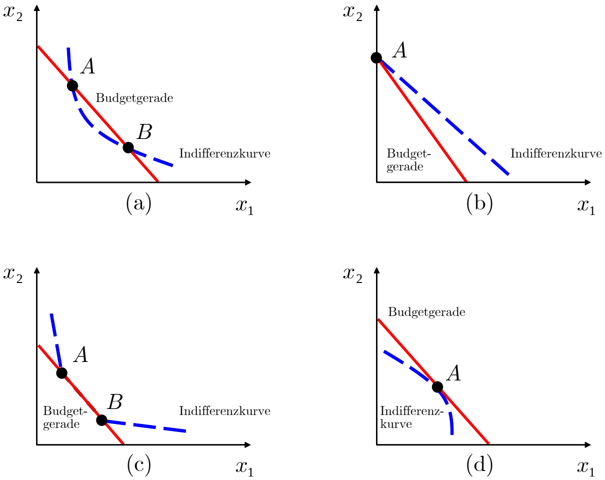
Maximierungsproblem des Haushalts



Haushaltsoptimum:
Wähle ein Güterbündel auf der
- höchsten (Maximierung)
- erreichbaren (innerhalb des Budgets)

Indifferenzkurve!

Vier Maximierungsprobleme



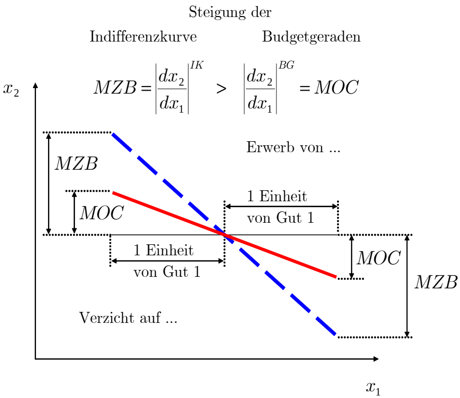
Problem

Sind die Punkte A oder B bei monotonen Präferenzen optimal?

Marginale Zahlungsbereitschaft MZB versus marginale Opportunitätskosten MOC

- Marginale **Zahlungsbereitschaft**:
  Auf wie viele Einheiten von Gut 2 **kann** der Konsument beim Konsum einer zusätzlichen Einheit von Gut 1 verzichten, damit er zwischen beiden Güterbündeln indifferent ist?
- Marginale **Opportunitätskosten**:
  Auf wie viele Einheiten von Gut 2 **muss** der Konsument beim Konsum einer zusätzlichen Einheit von Gut 1 aufgrund der Budgetrestriktion verzichten?

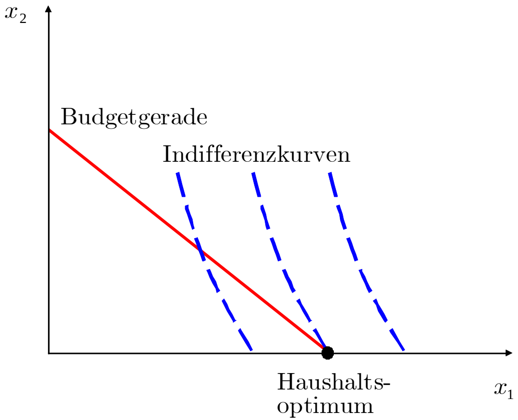
MZB versus MOC



Also: Es lohnt sich, den Konsum um eine Einheit auszudehnen.

MZB versus MOC

$MRS > MOC \Rightarrow$ erhöhe x_1 (falls möglich)



MZB versus MOC

Alternativ: der Haushalt möchte $U\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)$ maximieren

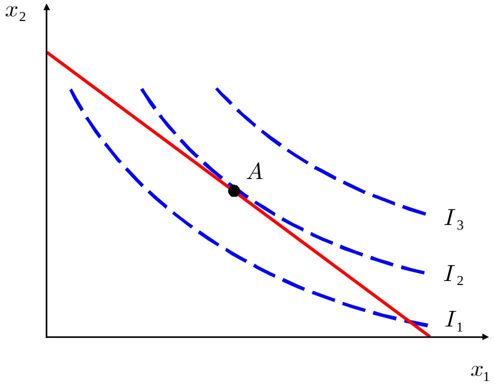
- Beim Konsum einer zustäzlichen Einheit von Gut 1 folgt
  - Nutzenerhöhung um $\frac{\partial U}{\partial x_1}$
  - Verringerung von x_2 um $MOC = \left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| = \frac{p_1}{p_2}$ und daher Nutzenreduktion um $\frac{\partial U}{\partial x_2}\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|$ (Kettenregel)
- Erhöhe x_1 solange wie

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_1}}_{\substack{\text{Grenznutzen} \\ \text{der Erhöhung von } x_1}} > \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_2}\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|}_{\substack{\text{Grenzkosten} \\ \text{der Erhöhung von } x_1}}$$

$$\text{oder } MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} > \left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| = MOC$$

Streng konvexe Präferenzen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktion



1. $MRS \stackrel{!}{=} MOC$
2. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \stackrel{!}{=} m$

Streng konvexe Präferenzen
Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

Bei Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ lautet das Verhältnis der Grenznutzen

$$MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{a x_1^{a-1} x_2^{1-a}}{(1-a)\, x_1^a x_2^{-a}} = \frac{x_2}{x_1} \frac{a}{1-a}$$

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten liefern das Haushaltsoptimum:

$$\begin{aligned} x_1^* &= a \frac{m}{p_1} \\ x_2^* &= (1-a) \frac{m}{p_2} \end{aligned}$$

Streng konvexe Präferenzen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

Problem

Olaf hat die Nutzenfunktion $U(D, C) = \sqrt{DC}$

- D = *Anzahl der Diskobesuche pro Monat und*
- C = *Anzahl der Konzertbesuche pro Monat*

Das Budget ist durch

- p_D = € 2,00 / *Diskobesuch,*
- p_C = € 4,00 / *Konzertbesuch und*
- m = € 64,00

gegeben.
Anstelle von $U(D, C) = \sqrt{DC}$ *auch* $(U(D, C))^2 = DC$ *möglich?*
Bestimmen Sie die von Olaf nachgefragten Mengen!

Streng konvexe Präferenzen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

- 1. Gossen'sches Gesetz

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 U}{(\partial x_1)^2} < 0$$

Der Grenznutzen nimmt mit jeder konsumierten Einheit ab.
Interpretation nur bei kardinaler Nutzentheorie möglich!

- 2. Gossen'sches Gesetz

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2}$$

Auch bei ordinaler Nutzentheorie sinnvolle Aussage!

Lagrange-Ansatz (Exkurs)

Nebenbedingung als Gleichung

- ist ein Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen bei Nebenbedingungen.
- **Annahme**: monotone und konvexe Präferenzen
- Maximiere

  $$U\left(x_1, x_2\right)$$

  unter der Nebenbedingung

  $$m - \left(p_1 x_1 + p_2 x_2\right) = 0$$

- Bei $m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0$ muss das so genannte Kuhn-Tucker-Verfahren gewählt werden.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

- Wenn man x_1 erhöht,
  - hat dies einen direkten (positiven) Einfluss auf den Nutzen, $\frac{\partial U}{\partial x_1} > 0$,
  - und einen indirekten (negativen): Der reduzierte Budgetüberschuss

    $$\frac{\partial(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)}{\partial x_1} = -p_1 < 0$$

    wird von $\lambda > 0$ in reduzierten Nutzen übersetzt, insgesamt also $\lambda(-p_1)$.
- Optimum: $\frac{\partial U}{\partial x_1} \overset{!}{=} \lambda p_1$.

Lagrange-Ansatz (Exkurs)

Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} &= \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} &= \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} &= m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Daher 2. Gossen'sches Gesetz:

$$\frac{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{p_1} \overset{!}{=} \lambda \overset{!}{=} \frac{\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}}{p_2}$$

und $MRS \overset{!}{=} MOC$.

Lagrange-Ansatz (Exkurs)

Grenznutzen des Einkommens – Interpretation

- λ kann als Grenznutzen des Einkommens interpretiert werden

$$\lambda = \frac{dU}{dm}.$$

- Dadurch ergibt sich für die Optimierungsbedingung

$$\frac{\partial U\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} \overset{!}{=} \frac{dU}{dm} p_1.$$

- aber: U hat m nicht als Argument ...

Lagrange-Ansatz (Exkurs)

Indirekte Nutzenfunktion

$$V(p_1, p_2, m) := U(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)).$$

$x_1(p_1, p_2, m)$ ist die bei den Preisen p_1 und p_2 und beim Einkommen m nutzenmaximal nachgefragte Menge von Gut 1.

Problem

Bestimmen Sie die indirekte Nutzenfunktion für die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ $(0 < a < 1)$!

- $V(p_1, p_2, m) := U(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m))$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial m} &= \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial m} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial m} \\ &= (\lambda p_1)\frac{\partial x_1}{\partial m} + (\lambda p_2)\frac{\partial x_2}{\partial m} \\ &= \lambda\left(p_1\frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial m}\right) \end{aligned}$$

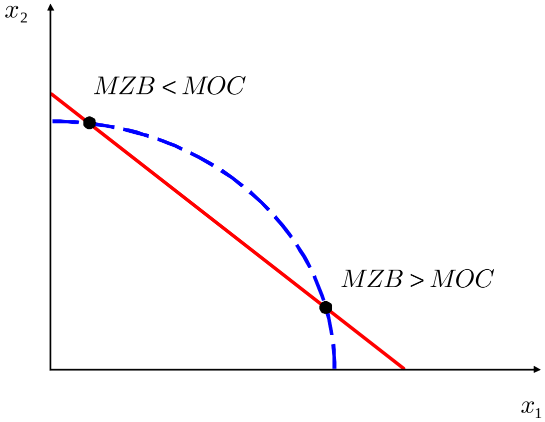
- $p_1 x_1(p_1, p_2, m) + p_2 x_2(p_1, p_2, m) = m$ führt zu

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial m} = 1$$

also exakter

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda.$$

Konkave Präferenzen



- $MRS > MOC \Rightarrow$ erhöhe x_1 (falls möglich)
- $MRS < MOC \Rightarrow$ reduziere x_1 (falls möglich)

Konkave Präferenzen

konkretes Beispiel

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Die Erhöhung des Konsums von Gut 1 erhöht den Nutzen, falls

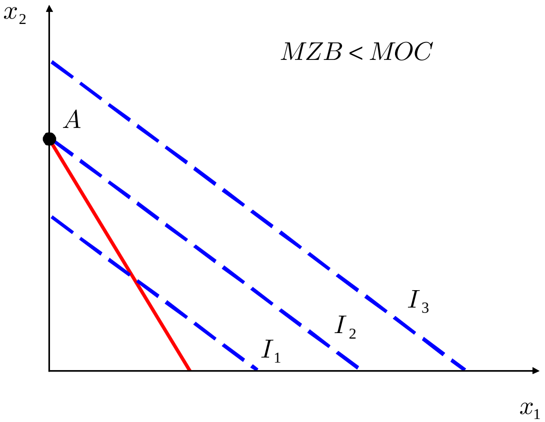
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2x_1}{2x_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = MRS > MOC = \frac{p_1}{p_2}$$

gilt. Also (fast immer) Randlösungen:

$$x^*(m, p) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), & p_1 < p_2 \\ \left\{\left(\frac{m}{p_1}, 0\right), \left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right\} & p_1 = p_2 \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) & p_1 > p_2 \end{cases}$$

Perfekte Substitute

graphische Lösung



$MRS < MOC \Rightarrow$ reduziere x_1 (falls möglich)

Perfekte Substitute

analytische Lösung

$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ mit $a > 0$ und $b > 0$

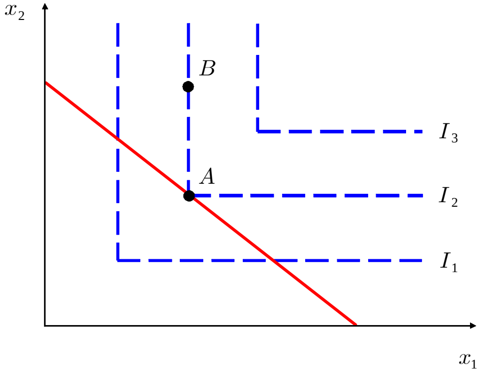
Die Erhöhung des Konsums von Gut 1 erhöht den Nutzen, falls

$$\frac{a}{b} = MRS > MOC = \frac{p_1}{p_2}$$

gilt. Also (fast immer) Randlösungen:

$$x^*(m,p) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), & \frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2} \\ \left\{\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \in \left[0, \frac{m}{p_1}\right]\right\} & \frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2} \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) & \frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Perfekte Komplemente



1. Eckpunkte bestimmen!
2. $p_1x_1 + p_2x_2 \stackrel{!}{=} m$

Perfekte Komplemente

$$U(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2)$$

- Eckpunkte

$$ax_1 \overset{!}{=} bx_2 \text{ oder}$$
$$x_2 \overset{!}{=} \frac{a}{b}x_1$$

- Budgetgleichung

$$m \overset{!}{=} p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1 + p_2\frac{a}{b}x_1 = x_1\left(p_1 + \frac{a}{b}p_2\right)$$

- Für das erste Gut erhält man so

$$x_1^* = \frac{m}{p_1 + \frac{a}{b}p_2}.$$

Haushaltsoptima

Problem

Bestimmen Sie Haushaltsoptima bei variablem Einkommen m

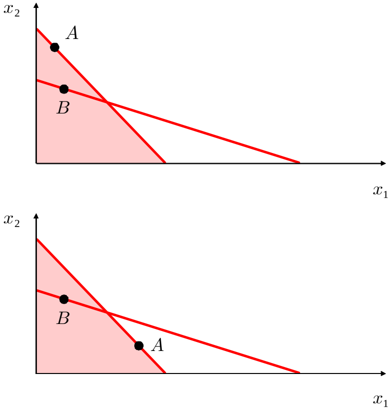
- *für die Nutzenfunktion* $U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$ *und die Preise* $p_1 = 1$ *und* $p_2 = 2$*;*
- *für lexikographische Präferenzen mit 1 als wichtigem Gut und die Preise* $p_1 = 2$ *und* $p_2 = 5$;
- *für die Nutzenfunktion* $U(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ *und die Preise* $p_1 = 1$ *und* $p_2 = 3$;
- *für die Nutzenfunktion* $U(x_1, x_2) = \min(x_1, 2x_2)$ *und die Preise* $p_1 = 1$ *und* $p_2 = 3$!

Bekundete Präferenzen

- Üblicher Weg: Budget und Päferenzen $\Rightarrow$ Haushaltsoptimum
- Alternative: tatsächliche Entscheidungen der Haushalte $\Rightarrow$ Präferenzen.

$\Longrightarrow$ Diese Präferenzen nennt man bekundet. (SH 18)

Bekundete Präferenzen



Problem

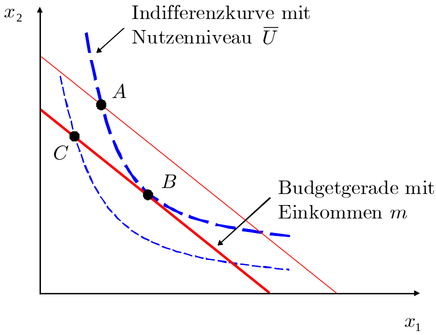
Sind die angedeuteten Entscheidungen

- *bei der flacheren Budgetgeraden Güterbündel B und*
- *bei der steileren Budgetgeraden Güterbündel A*

mit Monotonie vereinbar?

Maximierungs- und Minimierungsproblem

- Maximierung: Finde das Güterbündel, das den Nutzen bei gegebener Budgetlinie maximiert!



- Minimierung: Finde das Güterbündel, das die Ausgaben, die für ein vorgegebenes Nutzenniveau notwendig sind, minimiert.

Die Ausgabenfunktion

$$e\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) := \min_{\substack{x_1, x_2 \\ \text{mit } \overline{U} = U(x_1, x_2)}} \left(p_1 x_1 + p_2 x_2\right)$$

Haushaltsoptimum: kompensierte Nachfrage

$$\chi_1\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) \text{ und } \chi_2\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$$

Kompensiert: Um bei Preiserhöhungen das Nutzenniveau zu halten, ist das Einkommen kompensierend zu erhöhen.

Die Ausgabenfunktion

Funktion	**Argumente**	**Optimum**
Nutzenfunktion	Gütermengen	$x_1(p_1, p_2, m)$, $x_2(p_1, p_2, m)$
Ausgabenfunktion	Nutzenniveau, Preise	$\chi_1\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$, $\chi_2\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$

Die Ausgabenfunktion

- χ_1 und χ_2 = **Hicks'sche Nachfrage** (kompensierte Nachfrage): gibt an, mit welchem Güterbündel ein angestrebtes Nutzenniveau mit geringstmöglichen Ausgaben erreicht wird.
- x_1 und x_2 = **Marshall'sche Nachfrage**:
  gibt an, mit welchem Güterbündel das maximale Nutzenniveau bei gegebenem Einkommen erreicht wird.
- Fast immer gilt:

$$x_1\left(p_1, p_2, e\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)\right) = \chi_1\left(p_1, p_2, \overline{U}\right).$$

Die Ausgabenfunktion

Problem

Bestimmen Sie die Ausgabenfunktion für die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ *mit* $0 < a < 1$*! Geben Sie auch die Gütermengen an, die bei einem vorgegebenen Nutzenniveau die Ausgaben minimieren! Hinweis: Sie können mit den Gütermengen* $x_1^* = a\frac{m}{p_1}$ *und* $x_2^* = (1-a)\frac{m}{p_2}$ *arbeiten. Wählen Sie den Ansatz* $\overline{U} = U(x_1^*, x_2^*)$ *und ermitteln Sie das Budget* $m = e\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$*, das für den vorgegebenen Nutzen* $\overline{U}$ *notwendig ist!*

Zentrale Hörsaalübungen I

Aufgabe D.9.1.
Ein Viehzüchter lebt von Milch (Gut 1) und Brot (Gut 2). Er melkt jeden Tag seine Kuh und erhält dabei 10 Liter Milch, mit denen er auf den Markt geht, um Brot einzutauschen. Seine Nutzenfunktion ist $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + 3 \ln x_2$, wobei x_1 und x_2 den Konsum an Milch und Brot bezeichnen. Auf dem Markt beträgt der Preis für einen Liter Milch 1 Taler, für einen Laib Brot 5 Taler. Wie viel Milch und wie viel Brot konsumiert der Viehzüchter täglich?

Aufgabe D.9.2.
Ein Haushalt mit der Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ gibt sein gesamtes Einkommen $m = 16$ für die beiden Güter mit den Preisen $p_1 = 1$ und $p_2 = 4$ aus. Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

Zentrale Hörsaalübungen II

Aufgabe D.9.3.
$U(x_1, x_2) = \min\left(x_1, \frac{1}{2}x_2\right)$
$m = 15$, $p_1 = 2$ und $p_2 = 4$
Haushaltsoptima!

Aufgabe D.9.4.
$U(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$
$m = 8$, $p_1 = 2$ und $p_2 = 4$
Haushaltsoptima!

Aufgabe D.9.5.
$U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$
m, p_1 und p_2 mit $\frac{m}{p_2} > 1$
Haushaltsoptima!
Ausgabenfunktion!