Mikroökonomik

Präferenzen, Indifferenzkurven und Nutzenfunktionen

Harald Wiese

Universität Leipzig

Gliederung

Überblick

- Die Präferenzrelation
- Die Indifferenzkurve
- Nutzenfunktionen

Die Präferenzrelation

Mick Jagger: You can't always get what you want.

- Präferenz: Wertschätzung
- Präferenzrelation: Ordnungsrelation

Die Präferenzrelation

Definition (Schwache Präferenzrelation)

$$X = (x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) = Y$$

X ist mindestens so gut wie Y

Definition (Indifferenz)

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$$

X ist genau so gut wie Y

Definition (Starke Präferenzrelation)

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$$

X ist besser als Y

Die Präferenzrelation

Problem

Leiten Sie die starke Präferenzrelation und die Indifferenzrelation aus der schwachen Präferenzrelation ab!

- Vollständigkeit: Jedes Individuum kann alle Güter entsprechend der schwachen Präferenzrelation $\succsim$ ordnen: $A \succsim B$ oder $B \succsim A$
- Transitivität: Sind drei Güterbündel A, B und C mit $A \succsim B$ und $B \succsim C$ gegeben, dann folgt $A \succsim C$. (SH 65)

Problem

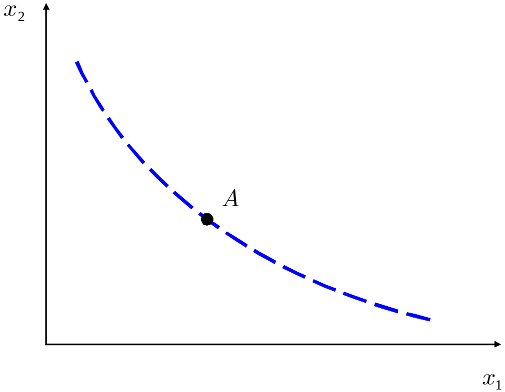
Gelten Vollständigkeitsaxiom und Transitivitätsaxiom auch für die starke Präferenzrelation und für die Indifferenz?

Die Präferenzrelation

Problem

Estefania gibt ihr gesamtes Monatseinkommen für Pizza und Bücher aus.
$p_{Pizza} = 9,00$, $p_{Buch} = 30,00$
$x_{Pizza} = 30$, $x_{Buch} = 3$.
Bei keiner anderen Kombination von Pizzas und Büchern, die sie sich leisten kann, könnte sie sich besser stellen.
Angenommen p_{Pizza} *sinkt auf* $8,70$ *und*
p_{Buch} *steigt auf* $33,00$.
Können wir ohne zusätzliche Information über Estefanias Präferenzen wissen, ob sie sich aufgrund der Preisänderung schlechter oder besser stellt? Hinweis: Kann sich Estefania bei den neuen Preisen das alte Konsumbündel weiterhin leisten?

Geometrischer Ort aller Güterbündel zwischen denen das Individuum indifferent ist. (SH 65)



Die Indifferenzkurve

Problem

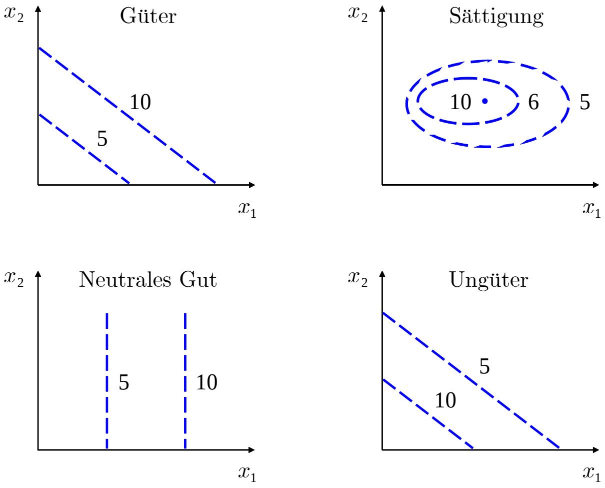
Zeichnen Sie jeweils passende Indifferenzkurven:

1. *Perfekte Substitute:*
   Strikte Präferenz von (x_1, x_2) *gegenüber* (y_1, y_2) *genau dann, wenn* $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$.
2. *Perfekte Komplemente:*
   Strikte Präferenz bei $\min(x_1, x_2) > \min(y_1, y_2)$.
3. *Lexikographische Präferenzen:*
   Strikte Präferenz bei
   - $x_1 > y_1$ *oder*
   - $x_1 = y_1$ *und* $x_2 > y_2$

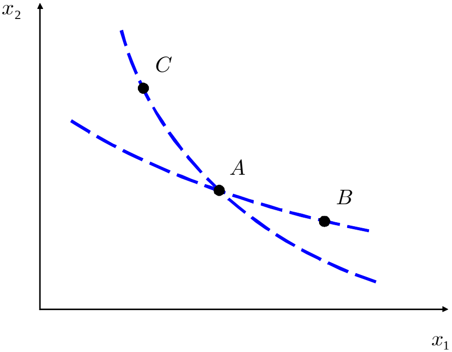
   gelten. *(SH 63f)*

Die Indifferenzkurve

Definition und Beispiele



Indifferenzkurven dürfen sich nicht schneiden!!



- $C \sim A \wedge A \sim B \Rightarrow C \sim B$
- Widerspruch zu zwei unterschiedlichen Indifferenzkurven

Die Indifferenzkurve

Monotonie

- Obi: Mehr ist mehr
- „Mehr ist besser" (SH 66)
- Nichtsättigung

$$(x_1 \geq y_1) \wedge (x_2 \geq y_2) \wedge X \neq Y \Rightarrow X \succ Y$$

Problem

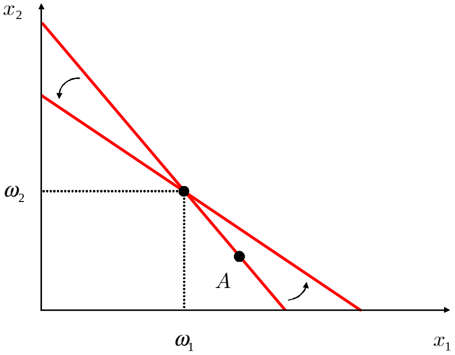
Wie würden Sie Monotonie graphisch veranschaulichen?

Problem

Monotonie bei Abbildung oben?

Die Indifferenzkurve

Monotonie

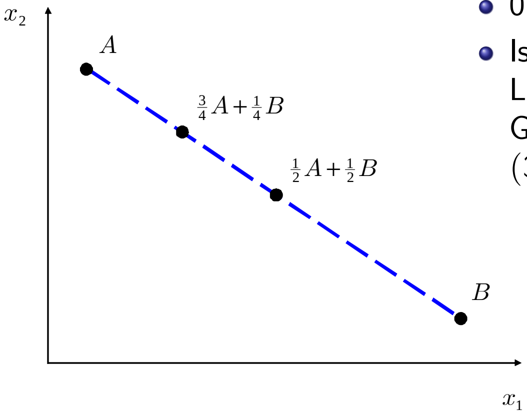


Problem

Könnte der Haushalt nach der Preisänderung einen Konsumpunkt links des Schnittpunktes wählen?

Die Indifferenzkurve

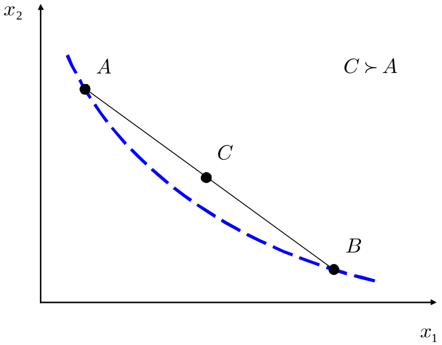
Konvexe Linearkombination



- $0 \cdot A + (1-0)\, B = ?$
- Ist $(3,7)$ eine konvexe Linearkombination der Güterbündel $(3,6)$ und $(3,9)$?

Die Indifferenzkurve

Konvexität: „Extreme sind schlecht"



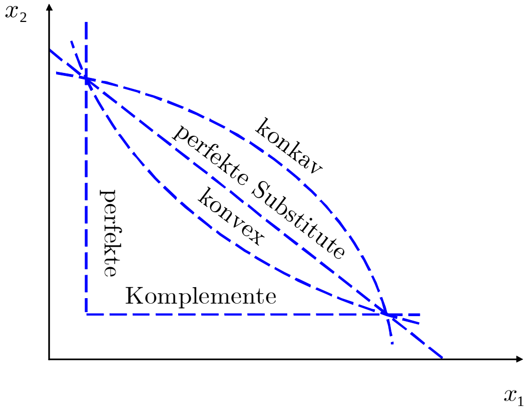
- Konvexität
  = schwache Konvexität:
  C mindestens so gut wie A
- strenge Konvexität: C besser als A (SH 65)

Problem

Konvexität oder sogar strenge Konvexität bei Abbildung oben?

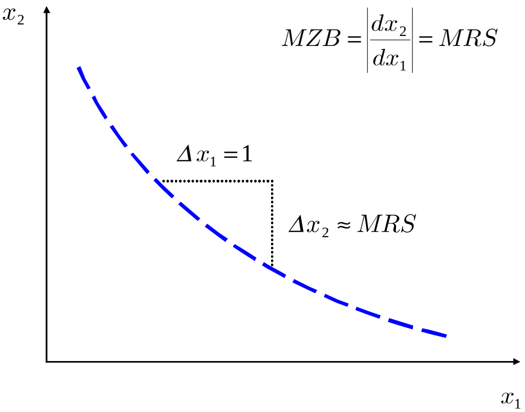
Die Indifferenzkurve

Perfekte Komplemente, perfekte Substitute, ...



Die Indifferenzkurve

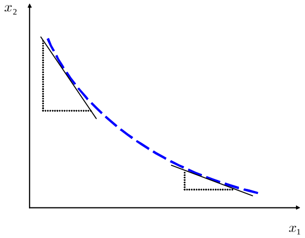
Die Grenzrate der Substitution



Die Indifferenzkurve

Die Grenzrate der Substitution

- konvexe und monotone Präferenzen —> MRS nimmt mit zunehmendem x_1 ab



- perfekte Substitute —> konstant
- perfekte Komplemente —> nicht überall definiert

Problem

$\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|^{Marie} = 2$, $\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|^{Laura} = 5$. *Marie gibt Laura eine Einheit von Gut* 1 *und erhält eine Einheit von Gut* 2. *Wer hat sich besser gestellt?*

Die Indifferenzkurve

MRS versus MOC

Problem

Nehmen Sie an, ein Haushalt konsumiere zwei Güter so, dass

$$MRS = \left| \frac{dx_2}{dx_1} \right| < \frac{p_1}{p_2} = MOC$$

gilt. In welche Richtung wird der Konsument sein Verhalten ändern? Beginnen Sie Ihre Argumentation entweder mit den Worten: „Wenn der Haushalt eine Einheit von Gut 1 zusätzlich konsumiert ...“ oder aber so: „Wenn der Haushalt auf den Konsum einer Einheit von Gut 1 verzichtet ...“

Nutzenfunktionen

Definition

- sind Abbildungen der Menge der Güterbündel in die Menge der reellen Zahlen („ordnen jedem Güterbündel einen Wert zu")
- ordnen den Güterbündeln bei Indifferenz denselben und bei starker Präferenz dem präferierten Güterbündel einen höheren Wert zu

Nutzenfunktionen

Definition

- Perfekte Substitute (Beispiel):

$$U(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

- Perfekte Komplemente (Beispiel):

$$U(x_1, x_2) = \min(x_1, 2x_2)$$

- Lexikographische Präferenzen —> **keine** Nutzenrepräsentation

Problem

Worin unterscheiden sich die Indifferenzkurven, denen die Nutzenfunktionen $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ bzw. $V(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2)$ zu Grunde liegen?

sind äquivalent, falls sie durch folgende monotone Transformationen voneinander abgeleitet werden können:

- Multiplikation mit positiven Zahlen,
- Quadrieren (ausgehend von positiven Zahlen)
- Logarithmieren.

Problem

Sind die Nutzenfunktionen $U(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}}$ *und* $V(x_1, x_2) = 13(x_1 + x_2)$ *äquivalent?*

Partielle Ableitungen

Bei einer Funktion mit mehreren Variablen möchte man bisweilen nach der einen oder anderen ableiten.
Dazu hält man die übrigen Variablen konstant.
Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= x_2^2 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 2 x_1 x_2 \end{aligned}$$

Beispiele: Grenznutzen bei zwei Gütern

Nutzenfunktionen

Ordinale und kardinale Nutzentheorie

kardinale	ordinale
Nutzen als Maß für die Befriedigung	Nutzen als Beschreibung einer Präferenzordnung
absolute Höhe relevant	nur Rangordnung relevant
Grenznutzen und Nutzen-differenzen sind direkt interpretierbar	Grenznutzen und Nutzen-differenzen sind nur in Bezug auf das Vor-zeichen interpretierbar

Definition (1. Gossen'sches Gesetz)

Der Grenznutzen

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

nimmt mit jeder zusätzlich konsumierten Einheit ab.

- MU_1 für $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ oder für $U(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$?
- nur kardinal interpretierbar!

Aber:

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2}$$

auch ordinal interpretierbar.

Nutzenfunktionen

MRS = MU1 durch MU2

- Zu x_1 gibt es $x_2 = f(x_1)$, sodass der Nutzen konstant bleibt
- *MRS* ist der Betrag der Steigung von f
- $U(x_1, f(x_1)) = \text{konstant}$
- Differenzieren nach x_1 liefert

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{df(x_1)}{dx_1} = 0$$

und dann

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

Problem

Bestimmen Sie die MRS für perfekte Substitute,
$U(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$*!*

Nutzenfunktionen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a},\ 0 < a < 1$$

Problem

Wie lautet die Grenzrate der Substitution für die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion? Warum kann man an ihr ablesen, dass die dazugehörigen Präferenzen konvex sind? Hinweis: Man kann die Grenzrate der Substitution leicht berechnen, wenn man zu der äquivalenten Nutzenfunktion $V(x_1, x_2) = \ln U(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (1-a) \ln x_2$ *übergeht und daran denkt, dass die Ableitung des Logarithmus den Kehrwert ergibt, dass also gilt:*

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Nutzenfunktionen

Quasilineare Nutzenfunktionen

$$U(x_1, x_2) = V(x_1) + x_2$$

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\frac{dV}{dx_1}}{1} = \frac{dV}{dx_1}$$

Problem

Sie wissen, dass Präferenzen konvex sind, wenn die Grenzrate der Substitution entlang jeder Indifferenzkurve und mit zunehmendem Einsatz von Gut 1 abnimmt. Welche Form muss V haben, damit die quasilinearen Präferenzen Monotonie und Konvexität aufweisen?

Perfekte Substitute:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \quad \text{mit } a, b > 0$$

Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a} \quad \text{mit } 0 < a < 1$$

Perfekte Komplemente:

$$U(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2) \quad \text{mit } a, b > 0$$

Quasilineare Nutzenfunktionen:

$$U(x_1, x_2) = V(x_1) + x_2 \quad \text{mit } V' > 0$$

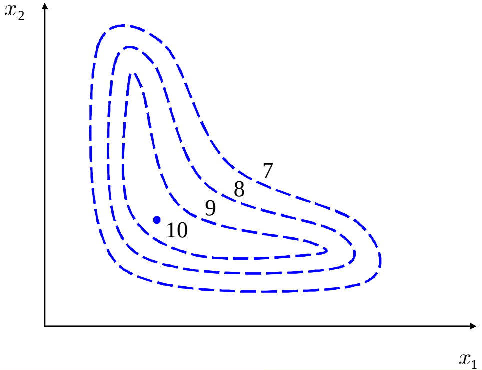
Zentrale Hörsaalübungen I

Aufgabe C.5.1.
Corinna konsumiert 20 verschiedene Güter und gibt dafür ihr gesamtes Einkommen aus. Dieses Güterbündel zieht sie allen anderen strikt vor, die sie sich ebenfalls leisten könnte. Nach einer Preisänderung wählt sie ein neues Güterbündel, das sie besser stellt. Können wir nun schließen, dass das neue Güterbündel zu den alten Preisen mehr kostet als das alte Bündel zu den alten Preisen?

Aufgabe C.5.2.
Zu Preisen von $(p_1, p_2) = (1, 2)$ fragt ein Konsument $(x_1, x_2) = (1, 2)$ nach, zu Preisen von $(q_1, q_2) = (2, 1)$ die Mengen $(y_1, y_2) = (2, 1)$. Sind diese Entscheidungen mit Monotonie vereinbar?

Zentrale Hörsaalübungen II

Aufgabe C.5.3.
Untersuchen Sie die durch ein paar Indifferenzkurven angedeuteten Präferenzen auf Monotonie und Konvexität! Der Punkt mit der 10 stellt einen Bliss-Punkt dar, d. h. die Wahl anderer Güterbündel stellt den Haushalt schlechter.



Zentrale Hörsaalübungen III

Aufgabe C.5.4.
Welche der folgenden Nutzenfunktionen repräsentieren dieselben Präferenzen? Warum?

a) $U_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$
b) $U_2(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + 1) + \ln(x_2 + 1) + \ln(x_3 + 1)$
c) $U_3(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$
d) $U_4(x_1, x_2, x_3) = -[(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)]^{-1}$
e) $U_5(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$

Aufgabe C.5.5.
Die Nutzenfunktion eines Individuums sei
$U(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$.
Wie lautet die Grenzrate der Substitution?

Zentrale Hörsaalübungen IV

Aufgabe C.5.6.
Stellt das Güterbündel $(4, 3)$ eine konvexe Linearkombination der Güterbündel $(2, 4)$ und $(6, 2)$ dar?

Aufgabe C.5.7.
Skizzieren Sie jeweils Indifferenzkurven für

a) zwei Güter, bei denen Gut 1 für rote und Gut 2 für blaue Streichhölzer steht (bei gleichen Brenneigenschaften)
b) zwei Güter, wenn Gut 1 für linke und Gut 2 für rechte Schuhe steht (und das Individuum über zwei Füße verfügt)
c) zwei Güter, die Ungüter sind, d. h. der Besitz der Güter wird negativ (z. B. radioaktiver Müll) durch einen Haushalt bewertet!