Aufgabe 1 (15 Punkte)
Gegeben sei ein gewichtetes Abstimmungsspiel mit der Spielermenge $N = \{1, 2, 3, 4\}$, der Quote $q = 0,55$ sowie den Stimmgewichten $w_1 = 0,3$, $w_2 = 0,1$, $w_3 = 0,2$ sowie $w_4 = 0,4$.

(a) Stellen Sie die Koalitionsfunktion auf!

(b) Ist Spieler 1 ein Veto-Spieler? Begründen Sie!

(c) Bestimmen Sie die Banzhaf-Auszahlung für den ersten Spieler!

(d) Erfüllt das Banzhaf-Lösungskonzept allgemein das Nullspieler-Axiom? Begründen Sie!

Lösungsvorschlag:

(a) Die Koalitionsfunktion lautet:

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| = 1,\ K = \{1,2\},\ K = \{1,3\},\ K = \{2,3\}\ K = \{2,4\} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Nein. Für einen Veto-Spieler $i \in N$ gilt: $v(N \backslash \{i\}) = 0$. Die Spielermenge $\{2, 3, 4\}$ erzielt den Wert eins, so dass Spieler 1 kein Veto-Spieler ist.

(c) Spieler 1 kann $2^{n-1} = 2^{4-1} = 8$ Koalitionen beitreten. Seine marginalen Beiträge lauten:

K	MB_1
$\varnothing$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	0
$\{4\}$	1
$\{2,3\}$	1
$\{2,4\}$	1
$\{3,4\}$	0
$\{2,3,4\}$	0
Bz_1	$\frac{3}{8}$

(d) Ja. Das Nullspieler-Axiom fordert, dass Nullspieler – jene Spieler i, für die $v(K) = v(K \backslash \{i\})$ für alle $K \subseteq N$ erfüllt ist – die Auszahlung null erhalten. Da zur Berechnung der Banzhaf-Auszahlungen ausschließlich auf marginale Beiträge Bezug genommen wird, erhält ein Nullspieler die Bz-Auszahlung null zugewiesen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben sei die Spielermenge $N = \{1, 2, 3\}$ sowie die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 10, & |K| = 1 \\ 22, & K = \{2,3\}, \ K = \{1,2\} \\ 30, & K = \{1,3\} \\ 40, & K = N. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Aumann-Drèze-Auszahlungen der Spieler für die Partition $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ unter Nutzung der Axiome des Lösungskonzepts!

Lösungsvorschlag:

Für Spieler 1 ergibt sich auf Grund des Komponenteneffizienz-Axioms die Auszahlung $\mathrm{AD}_1(N, v, \mathcal{P}) = 10 = v(\mathcal{P}(1))$. Die Spieler 2 und 3 sind im auf ihre Komponente eingeschränkten Spiel symmetrisch:

$$\begin{aligned} v|_{\mathcal{P}(2)}(\{2\}) - v|_{\mathcal{P}(2)}(\varnothing) &= v|_{\mathcal{P}(2)}(\{3\}) - v|_{\mathcal{P}(2)}(\varnothing) = 10 \\ v|_{\mathcal{P}(2)}(\{2,3\}) - v|_{\mathcal{P}(2)}(\{2\}) &= v|_{\mathcal{P}(2)}(\{2,3\}) - v|_{\mathcal{P}(2)}(\{3\}) = 12. \end{aligned}$$

Es gilt daher $\mathrm{AD}_2(N, v, \mathcal{P}) = \mathrm{AD}_3(N, v, \mathcal{P})$. Zusammen mit dem Komponenteneffizienz-Axiom folgt $\mathrm{AD}_2(N, v, \mathcal{P}) = \mathrm{AD}_3(N, v, \mathcal{P}) = 11$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben sei die Spielermenge $N = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 5, & |K| = 1 \\ 21, & |K| = 2 \\ 36, & |K| = 3 \\ 48, & K = N. \end{cases}$$

Betrachten Sie das Netzwerk $\mathcal{L}$ in Abbildung 1. Bestimmen Sie für dieses Netzwerk die Myerson-Koalitionsfunktion $v^{\mathcal{L}}$!

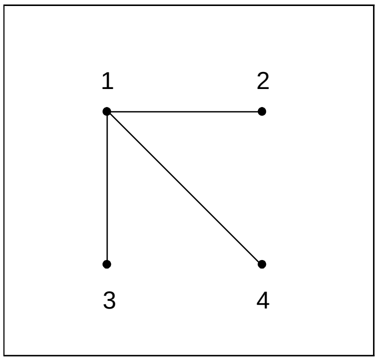

Abbildung 1: Netzwerk

Lösungsvorschlag:

Für $2^4 - 1 = 15$ Koalitionen (die leere Menge erhält weiterhin den Wert null) müssen Werte angegeben werden

$$v(K) = \begin{cases} 5, & K \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \\ 10, & K \in \{\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\} \\ 15, & K = \{2,3,4\} \\ 21, & K \in \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\} \\ 36, & K \in \{\{1,2,3\} \{1,2,4\} \{1,3,4\}\} \\ 48, & K = \{1,2,3,4\}. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Ein Spiel (N, v) sei gegeben durch die Spielermenge $N = \{1, 2, 3\}$ sowie die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| = 1 \\ 12, & K = \{1,2\} \\ 18, & K = \{1,3\} \\ 24, & K = \{2,3\} \\ 36, & K = N. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Shapley-Auszahlungen der Spieler!

(b) Zusätzlich ist die Hierarchie S mit $S(1) = \{2, 3\}$ und $S(2) = S(3) = \varnothing$ gegeben. Bestimmen Sie die HC-Auszahlungen der Spieler!

(c) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse!

Lösungsvorschlag:

(a) Die Shapley-Auszahlungen ergeben sich als

RF	MB_1	MB_2	MB_3
$1, 2, 3$	0	12	24
$1, 3, 2$	0	18	18
$2, 1, 3$	12	0	24
$2, 3, 1$	12	0	24
$3, 1, 2$	18	18	0
$3, 2, 1$	12	24	0
Sh_i	9	12	15

(b) Die Koalitionsfunktion $v|_S^c$ lautet:

$$v|_S^c(K) = \begin{cases} 0, & |K| = 1 \\ 12, & K = \{1,2\} \\ 18, & K = \{1,3\} \\ 0, & K = \{2,3\} \\ 36, & K = N. \end{cases}$$

Für die Spieler-Auszahlungen resultiert:

RF	MB_1	MB_2	MB_3
$1, 2, 3$	0	12	24
$1, 3, 2$	0	18	18
$2, 1, 3$	12	0	24
$2, 3, 1$	36	0	0
$3, 1, 2$	18	18	0
$3, 2, 1$	36	0	0
HC_i	17	8	11

(c) Spieler 1 profitiert von seiner Position innerhalb der Hierarchie.

Aufgabe 5 (25 Punkte)
Ein Unternehmer U erhält von zwei Finanziers, F_1 und F_2, Kapital zur Verfügung gestellt, um Investitionen zu tätigen. Die Koalitionsfunktion lautet

$$v(K) = \begin{cases} 12, & K = \{U, F_1\}, \ K = \{U, F_2\} \\ 18, & K = N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Shapley-Auszahlungen der Spieler ergeben sich als:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_U(N, v) &= 10, \\ \mathrm{Sh}_{F_1}(N, v) &= 4, \\ \mathrm{Sh}_{F_2}(N, v) &= 4. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Owen-Auszahlungen der Akteure für die Partition $\mathcal{P} = \{\{U\}, \{F_1, F_2\}\}$! Kommentieren Sie!

(b) Ermitteln Sie die Wiese- und die χ-Auszahlungen der Akteure für die Partition $\mathcal{P} = \{\{U, F_1\}, \{F_2\}\}$!

(c) Inwieweit spiegeln die Ergebnisse aus (b) Außenoptionen wider?

Lösungsvorschlag:

(a) Owen-Auszahlungen

RF	MB_U	MB_{F_1}	MB_{F_2}
U, F_1, F_2	0	12	6
U, F_2, F_1	0	6	12
F_1, F_2, U	18	0	0
F_2, F_1, U	18	0	0
Ow_i	$\frac{36}{4} = 9$	$\frac{18}{4} = 4,5$	$\frac{18}{4} = 4,5$

Im Vergleich zu den Shapley-Auszahlungen $\mathrm{Sh}_U(N, v) = 10$, $\mathrm{Sh}_{F_1}(N, v) = \mathrm{Sh}_{F_2}(N, v) = 4$ hat sich die Auszahlung der Finanziers erhöht (Verhandlungskomponente).

(b) Wiese-Auszahlungen:

RF	MB_U	MB_{F_1}	MB_{F_2}
U, F_1, F_2	0	$12 - 0$	$0 - 0$
U, F_2, F_1	0	$12 - 0$	$0 - 0$
F_1, U, F_2	$12 - 0$	0	$0 - 1$
F_1, F_2, U	$12 - 0$	0	$0 - 0$
F_2, U, F_1	12	$12 - 12$	$0 - 0$
F_2, F_1, U	$12 - 0$	0	$0 - 0$
Wi_i	$\frac{48}{6} = 8$	$\frac{24}{6} = 4$	$\frac{0}{6} = 0$

χ-Auszahlungen:

Für die χ-Auszahlungen resultieren: $\chi_U(N, v, \mathcal{P}) = 10 + \frac{12-10-4}{2} = 9$, $\chi_{F_1}(N, v, \mathcal{P}) = 4 + \frac{12-10-4}{2} = 3$ und $\chi_{F_2O}(N, v, \mathcal{P}) = 0$.

(c) Im auf die Komponente $\{U, F_1\}$ beschränkten Spiel sind beide Akteure symmetrisch. Auf Grund der besseren Außenoption mit Akteur F_2 erhält U einen höheren Anteil des Werts der Komponente als F_1.