Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben sei die Spielermenge $N = \{1, 2, 3\}$ und die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 10, & K = \{1\}, \ K = \{2\}, \ K = \{1,3\}, \ K = \{2,3\} \\ 30, & K = \{1,2\}, \ K = N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Gibt es Nullspieler? Begründen Sie!

(b) Prüfen Sie, ob symmetrische Spieler existieren!

(c) Bestimmen Sie die Shapley-Auszahlungen der Spieler! Nutzen Sie dabei soweit wie möglich die Axiome des Lösungskonzepts!

Lösungsvorschlag:

(a) Spieler 3 ist Nullspieler im gegebenen Spiel. Er leistet zu den Koalitionen $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$ sowie zur leeren Menge den marginalen Beitrag null. Spieler 1 und 2 sind keine Nullspieler (siehe b)).

(b) Die Spieler 1 und 2 sind symmetrisch. Sie erbringen zur leeren Menge und zur Koalition $\{3\}$ den gleichen marginalen Beitrag

$$\begin{aligned} v(\{1\}) - v(\{\varnothing\}) &= v(\{2\}) - v(\{\varnothing\}) = 10 \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) &= v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 10. \end{aligned}$$

(c) Aufgrund des Nullspieler-Axioms erhält Spieler 3 die Shapley-Auszahlung null, $\mathrm{Sh}_3(N,v) = 0$.Dem Symmetrie-Axiom folgend gilt zudem $\mathrm{Sh}_1(N,v) = \mathrm{Sh}_2(N,v)$. Da zudem der gesamte erwirtschaftete Wert unter den Spielern verteilt werden soll (Effizienz-Axiom), folgt $\mathrm{Sh}_1(N,v) = \mathrm{Sh}_2(N,v) = 15$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Ein Schiffskanal soll erbaut werden, der von Schiffen der Typen A, B und C befahren wird. Schiffstyp A ist der kleinste Typ, C der größte. Die Baukosten betragen 135. Alternativ hätte der Kanal auch nur für Schiffe des Typs A erbaut werden können. Hierfür wären Kosten in Höhe von 80 angefallen. Ein Bau des Kanals in mittlerer Dimension, nutzbar für Schiffe der Typen A und B, hätte Kosten in Höhe von 120 hervorgerufen.
Es wird prognostiziert, dass in den nächsten Jahren vom kleinsten Schiffstyp 60 Fahrten, von Schiffen des Typs B 15 Fahrten und von Schiffen des Typs C 5 Fahrten auf dem Kanal stattfinden. Wie werden die Kosten für den Bau des Kanals in Höhe von 135 auf die einzelnen Fahrten aufgeteilt, wenn das Shapley-Lösungskonzept zur Kostenaufteilung dient?

Lösungsvorschlag:

Die Kosten der kleinsten Ausbaustufe werden auf alle 80 Fahrten gleichverteilt. Die Kostendifferenz zur nächsthöheren Ausbaustufe, 40, wird auf die Fahrten der Typen B und C gleichverteilt. Die zusätzlichen Kosten für den derzeitigen Ausbauzustand werden gleichmäßig auf die Bewegungen des Typs C umgelegt. Es resultieren damit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}_i(N,c) &= \frac{80-0}{60+15+5} = 1, \text{ mit } i \in A \\
\mathrm{Sh}_j(N,c) &= \frac{80-0}{60+15+5} + \frac{120-80}{15+5} = 1+2=3, \text{ mit } j \in B \\
\mathrm{Sh}_k(N,c) &= \frac{80-0}{60+15+5} + \frac{120-80}{15+5} + \frac{135-120}{5} = 1+2+3=6, \text{ mit } k \in C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (35 Punkte)
Nehmen Sie an, dass zwei Männer, Max (M) und Onno (O), dieselbe Frau Ada (A) lieben. Mit ein bisschen Fantasie kann man die Geschichte mit der folgenden Koalitionsfunktion zusammenfassen:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & |S| \leq 1 \\ 6, & S = \{M, A\} \\ 4, & S = \{O, A\} \\ 1, & S = \{M, O\} \\ 2, & S = \{M, O, A\}. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie

- die Owen-Auszahlungen der Spieler für die Partition $\mathcal{P} = \{\{M, O\}, \{A\}\}$,
- die AD-Auszahlungen, die Wiese-Auszahlungen sowie die χ-Auszahlungen der Spieler für die Partition $\mathcal{P} = \{\{M, A\}, \{O\}\}$.

(b) Reflektieren Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (a). Beantworten Sie dabei folgende Fragen:

- Vergleichen Sie die Interpretation einer Partition beim Owen-Lösungskonzept zu der beim Wiese-Lösungskonzept. Was bedeutet das für unser Spiel?
- Was unterscheidet das Wiese- bzw. das χ-Lösungskonzept vom AD-Lösungskonzept? Welches Konzept halten Sie als Lösung für dieses Spiel für besser geeignet? Begründen Sie kurz!

Lösungsvorschlag:

(a)

Owen-Auszahlungen

RF	MB_M	MB_O	MB_A
M, O, A	0	1	1
O, M, A	1	0	1
A, O, M	-2	4	0
A, M, O	6	-4	0
Ow_i	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

AD-Auszahlungen:

Onno erhält aufgrund der Komponenteneffizienz die Auszahlung null. Ada und Max sind in ihrer Komponente symmetrisch und teilen sich den Wert 6 auf, d.h. $\mathrm{AD}_M(N, v, \mathcal{P}) = \mathrm{AD}_A(N, v, \mathcal{P}) = 3$.

Wiese-Auszahlungen:

RF	MB_M	MB_O	MB_A
M, O, A	0	$0 - 0$	$6 - 0$
M, A, O	0	$0 - 0$	$6 - 0$
O, M, A	1	$0 - 0$	$6 - 1$
O, A, M	$6 - 4$	$0 - 0$	4
A, M, O	$6 - 0$	$0 - 0$	0
A, O, M	$6 - 0$	$0 - 0$	0
Wi_i	$\frac{15}{6}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{21}{6}$

χ-Auszahlungen:

Es werden zunächst die Shapley-Auszahlungen der Spieler ermittelt:

RF	MB_M	MB_O	MB_A
M, O, A	0	1	1
M, A, O	0	-4	6
O, M, A	1	0	1
O, A, M	-2	0	4
A, M, O	6	-4	0
A, O, M	-2	4	0
Sh_i	$\frac{3}{6}$	$-\frac{3}{6}$	$\frac{12}{6}$

Für die χ-Auszahlungen resultieren: $\chi_M(N, v, \mathcal{P}) = \frac{3}{6} + \frac{6 - \frac{3}{6} - \frac{12}{6}}{2} = \frac{9}{4}$, $\chi_A(N, v, \mathcal{P}) = \frac{12}{6} + \frac{6 - \frac{3}{6} - \frac{12}{6}}{2} = \frac{15}{4}$ und $\chi_O(N, v, \mathcal{P}) = 0$.

(b) Komponenten sind Verhandlungsblöcke vs. Komponenten als aktive Einheiten

Berücksichtigen von Außenoptionen

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Gegeben sei die Spielermenge $N = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 5, & |K| = 1 \\ 21, & |K| = 2 \\ 36, & |K| = 3 \\ 48, & K = N. \end{cases}$$

Betrachten Sie das Netzwerk $\mathcal{L}$ in Abbildung 1. Bestimmen Sie für dieses Netzwerk die Myerson-Koalitionsfunktion $v^{\mathcal{L}}$!

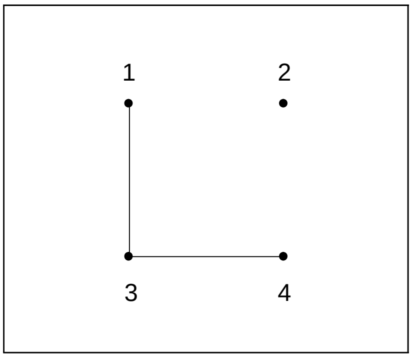

Abbildung 1: Netzwerk

Lösungsvorschlag:

Für $2^4 - 1 = 15$ Koalitionen (die leere Menge erhält weiterhin den Wert null) müssen Werte angegeben werden

$$v(K) = \begin{cases} 5, & K \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \\ 10, & K \in \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\} \\ 15, & K = \{1,2,4\} \\ 21, & K \in \{\{1,3\}, \{3,4\}\} \\ 26, & K \in \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}\} \\ 36, & K = \{1,3,4\} \\ 41, & K = \{1,2,3,4\}. \end{cases}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)
Betrachten Sie das Spiel, das durch die Spielermenge $N = \{1, 2, 3, 4\}$, die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| \leq 1 \\ 10, & |K| = 2 \\ 40, & |K| = 3 \\ 80, & K = N, \end{cases}$$

die Hierarchie S mit $S(1) = \{2, 4\}$, $S(2) = \{3\}$ und $S(3) = S(4) = \varnothing$ sowie den Gewichtsvektor $w = (w_1, \ldots, w_4) = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ gegeben ist. Berechnen Sie die wH-Auszahlungen der Spieler! Kommentieren Sie die Auswirkungen der gewichteten Hierarchie auf die Spieler-Auszahlungen!

Lösungsvorschlag:

Für die Shapley-Auszahlungen der Spieler resultiert aufgrund des Symmetrie- und Effizienz-Axioms $\mathrm{Sh}_i(N, v) = \frac{80}{4} = 20$. Für die wH-Auszahlungen ergeben sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{wH}_4(N, v, S, w) &= (1 - w_4) \cdot \mathrm{Sh}_4(N, v) \\
&= \frac{4}{5} \cdot 20 = 16 \\
\mathrm{wH}_3(N, v, S, w) &= (1 - w_3) \cdot \mathrm{Sh}_3(N, v) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \\
\mathrm{wH}_2(N, v, S, w) &= (1 - w_2) \cdot (\mathrm{Sh}_2(N, v) + w_3 \cdot \mathrm{Sh}_3(N, v)) \\
&= \frac{4}{5} \cdot \left(20 + \frac{1}{2} \cdot 20\right) = 24 \\
\mathrm{wH}_1(N, v, S, w) &= \mathrm{Sh}_1(N, v) + w_4 \cdot \mathrm{Sh}_4(N, v) + w_2 \cdot (\mathrm{Sh}_2(N, v) + w_3 \cdot \mathrm{Sh}_3(N, v)) \\
&= 20 + \frac{1}{5} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot \left(20 + \frac{1}{2} \cdot 20\right) = 30
\end{aligned}$$

+ kurze Interpretation.