Applied cooperative game theory

Hierarchy, salaries, and allocation

Tobias Hiller and Harald Wiese

Universität Leipzig

Juni 2010

Überblick

- *H*-Lösungskonzept
  - Einführung gewichtete Hierarchien
  - Berechnung + Beispiel
  - Axiomatisierung
  - Implikationen: Entlohnung
  - Implikationen: Allokation
- Basiert auf *Casajus/Hiller/Wiese (2009)*

Gewichtete Hierarchien: Motivation

- Entwicklung eines Entlohnungsschemas/Lösungskonzepts, das die Produktivität und die hierarchische Stellung der Mitarbeiter bei der Festlegung der Entlohnung berücksichtigt und zudem im Einklang mit der Literatur steht

Gewichtete Hierarchien: Motivation

- Entwicklung eines Entlohnungsschemas/Lösungskonzepts, das die Produktivität und die hierarchische Stellung der Mitarbeiter bei der Festlegung der Entlohnung berücksichtigt und zudem im Einklang mit der Literatur steht
- Mitarbeiter in höheren Ebenen partizipieren am (Miss-) Erfolg der Mitarbeiter auf niedrigeren Ebenen

Gewichtete Hierarchien: Motivation

- Entwicklung eines Entlohnungsschemas/Lösungskonzepts, das die Produktivität und die hierarchische Stellung der Mitarbeiter bei der Festlegung der Entlohnung berücksichtigt und zudem im Einklang mit der Literatur steht
- Mitarbeiter in höheren Ebenen partizipieren am (Miss-) Erfolg der Mitarbeiter auf niedrigeren Ebenen
- Beispiel: Strukturvertrieb (Amway, HMI etc.)

Gewichtete Hierarchien: Motivation

- Entwicklung eines Entlohnungsschemas/Lösungskonzepts, das die Produktivität und die hierarchische Stellung der Mitarbeiter bei der Festlegung der Entlohnung berücksichtigt und zudem im Einklang mit der Literatur steht
- Mitarbeiter in höheren Ebenen partizipieren am (Miss-) Erfolg der Mitarbeiter auf niedrigeren Ebenen
- Beispiel: Strukturvertrieb (Amway, HMI etc.)
- Die Höhe der Partizipation kann von den Personalverantwortlichen des Unternehmens bewusst gesetzt werden, um vertikale Lohndifferenzen zwischen den verschiedenen Hierarchieebenen zu beeinflussen

Gewichtete Hierarchien: Motivation

- Entwicklung eines Entlohnungsschemas/Lösungskonzepts, das die Produktivität und die hierarchische Stellung der Mitarbeiter bei der Festlegung der Entlohnung berücksichtigt und zudem im Einklang mit der Literatur steht
- Mitarbeiter in höheren Ebenen partizipieren am (Miss-) Erfolg der Mitarbeiter auf niedrigeren Ebenen
- Beispiel: Strukturvertrieb (Amway, HMI etc.)
- Die Höhe der Partizipation kann von den Personalverantwortlichen des Unternehmens bewusst gesetzt werden, um vertikale Lohndifferenzen zwischen den verschiedenen Hierarchieebenen zu beeinflussen
- Eine unterschiedliche Stärke gerichteter Verbindung zwischen Spielern wurde beispielsweise von *van den Brink/Gilles (2000)* und *Herings/van der Laan/Talman (2005)* bei der Bestimmung der Macht von Spielern in Netzwerken berücksichtigt

Begriffsklärung I

Begriffsklärung I

- Hierarchien sind von Einkommensleitern (engl.: job laddern) zu unterscheiden (*Lazear 1981, Carmichael 1983, Prendergast 1993*)

Begriffsklärung I

- Hierarchien sind von Einkommensleitern (engl.: job laddern) zu unterscheiden (*Lazear 1981, Carmichael 1983, Prendergast 1993*)
- Hauptunterschied zu Einkommensleitern ist die Zuordnung von Vorgesetzten und Untergebenen

Begriffsklärung I

- Hierarchien sind von Einkommensleitern (engl.: job laddern) zu unterscheiden (*Lazear 1981, Carmichael 1983, Prendergast 1993*)
- Hauptunterschied zu Einkommensleitern ist die Zuordnung von Vorgesetzten und Untergebenen
- Im Brockhaus ist zum Thema Hierarchie vermerkt:

Begriffsklärung I

- Hierarchien sind von Einkommensleitern (engl.: job laddern) zu unterscheiden (*Lazear 1981, Carmichael 1983, Prendergast 1993*)
- Hauptunterschied zu Einkommensleitern ist die Zuordnung von Vorgesetzten und Untergebenen
- Im Brockhaus ist zum Thema Hierarchie vermerkt:
  - Die durch Verhältnisse der Über- und Unterordnung bestimmte Ordnung der sozialen Beziehungen in Gruppen, Institutionen, Organisationen und in der Gesamtgesellschaft

Begriffsklärung I

- Hierarchien sind von Einkommensleitern (engl.: job laddern) zu unterscheiden (*Lazear 1981, Carmichael 1983, Prendergast 1993*)
- Hauptunterschied zu Einkommensleitern ist die Zuordnung von Vorgesetzten und Untergebenen
- Im Brockhaus ist zum Thema Hierarchie vermerkt:
  - Die durch Verhältnisse der Über- und Unterordnung bestimmte Ordnung der sozialen Beziehungen in Gruppen, Institutionen, Organisationen und in der Gesamtgesellschaft
  - Fast immer pyramidenförmig aufgebaut, ist eine vertikale Rangfolge ihrer Mitglieder kennzeichnend, deren Weisungs- und Entscheidungsbefugnis bei abnehmender Zahl von unten nach oben zunimmt. Die Positionen sind (bis auf die der obersten Leitung und die der untersten Ranginhaber) gleichzeitig die von Vorgesetzten und Untergebenen

Begriffsklärung II

Begriffsklärung II

- *Meagher (2001)* versteht unter dem Begriff Hierarchie: „The management hierarchy for a firm can be defined at a point in time by mapping out the superior-subordinate relationship.“

Begriffsklärung II

- *Meagher (2001)* versteht unter dem Begriff Hierarchie: „The management hierarchy for a firm can be defined at a point in time by mapping out the superior-subordinate relationship.“
- Bei *Radner (1992)* ist die Hierarchie ein geordneter Baum. Unter einem Baum versteht er eine Menge von Objekten (Mitarbeitern), über die die Relation „ist Vorgesetzter von“ gelegt wird mit folgenden Eigenschaften:

Begriffsklärung II

- *Meagher (2001)* versteht unter dem Begriff Hierarchie: „The management hierarchy for a firm can be defined at a point in time by mapping out the superior-subordinate relationship."
- Bei *Radner (1992)* ist die Hierarchie ein geordneter Baum. Unter einem Baum versteht er eine Menge von Objekten (Mitarbeitern), über die die Relation „ist Vorgesetzter von" gelegt wird mit folgenden Eigenschaften:

1. Transitivität: Ist A Vorgesetzter von B und B Vorgesetzter von C, so ist A ebenfalls Vorgesetzter von C.

Begriffsklärung II

- *Meagher (2001)* versteht unter dem Begriff Hierarchie: „The management hierarchy for a firm can be defined at a point in time by mapping out the superior-subordinate relationship."
- Bei *Radner (1992)* ist die Hierarchie ein geordneter Baum. Unter einem Baum versteht er eine Menge von Objekten (Mitarbeitern), über die die Relation „ist Vorgesetzter von" gelegt wird mit folgenden Eigenschaften:

1. Transitivität: Ist A Vorgesetzter von B und B Vorgesetzter von C, so ist A ebenfalls Vorgesetzter von C.
2. Antisymmetrie: Wenn A Vorgesetzter von B ist, dann kann B nicht Vorgesetzter von A sein.

Begriffsklärung II

- *Meagher (2001)* versteht unter dem Begriff Hierarchie: „The management hierarchy for a firm can be defined at a point in time by mapping out the superior-subordinate relationship.“
- Bei *Radner (1992)* ist die Hierarchie ein geordneter Baum. Unter einem Baum versteht er eine Menge von Objekten (Mitarbeitern), über die die Relation „ist Vorgesetzter von“ gelegt wird mit folgenden Eigenschaften:

1. Transitivität: Ist A Vorgesetzter von B und B Vorgesetzter von C, so ist A ebenfalls Vorgesetzter von C.
2. Antisymmetrie: Wenn A Vorgesetzter von B ist, dann kann B nicht Vorgesetzter von A sein.
3. Es existiert ein Mitarbeiter i_0 (die Wurzel des Baumes), der gegenüber allen anderen Vorgesetzter ist.

Begriffsklärung II

- *Meagher (2001)* versteht unter dem Begriff Hierarchie: „The management hierarchy for a firm can be defined at a point in time by mapping out the superior-subordinate relationship.“
- Bei *Radner (1992)* ist die Hierarchie ein geordneter Baum. Unter einem Baum versteht er eine Menge von Objekten (Mitarbeitern), über die die Relation „ist Vorgesetzter von“ gelegt wird mit folgenden Eigenschaften:

1. Transitivität: Ist A Vorgesetzter von B und B Vorgesetzter von C, so ist A ebenfalls Vorgesetzter von C.
2. Antisymmetrie: Wenn A Vorgesetzter von B ist, dann kann B nicht Vorgesetzter von A sein.
3. Es existiert ein Mitarbeiter i_0 (die Wurzel des Baumes), der gegenüber allen anderen Vorgesetzter ist.
4. Jedem Mitarbeiter, bis auf i_0, kann genau ein Vorgesetzter zugewiesen werden.

Begriffsklärung III

Die Reihung eines Baumes erfolgt derart, dass jedem Mitarbeiter eine Zahl bzw. eine Hierarchieebene zugewiesen wird, so dass

1. Wenn A Vorgesetzter von B ist, A eine höhere Zahl / Ebene zugewiesen bekommt und

Begriffsklärung III

Die Reihung eines Baumes erfolgt derart, dass jedem Mitarbeiter eine Zahl bzw. eine Hierarchieebene zugewiesen wird, so dass

1. Wenn A Vorgesetzter von B ist, A eine höhere Zahl / Ebene zugewiesen bekommt und
2. Wenn A und B der gleichen Ebene angehören, zwischen ihnen keine Dominanzbeziehung besteht, d.h. weder ist A Vorgesetzter von B noch B Vorgesetzter von A.

Literaturüberblick I

- In den Modellen von *Calvo/Wellisz (1979)*, *Rosen (1982)*, *Waldman (1984)* und *Qian (1994)* spielen die Fähigkeiten der Mitarbeiter eine entscheidende Rolle bei ihrer Allokation innerhalb der Hierarchie
- Ein Resultat ist die Allokation der fähigsten Mitarbeiter an die Spitze der Hierarchie, da die dort getroffenen Entscheidungen (bzw. durchgeführten Kontrollaktivitäten) einen größeren Einfluss auf den Unternehmensgewinn ausüben im Vergleich zu Entscheidungen auf niedrigeren Hierarchiestufen
- Auf Grund dieses höheren Einflusses werden die dort beschäftigten Mitarbeiter höher entlohnt als Mitarbeiter in niedrigeren Ebenen. Zudem zeigen die Autoren, dass der erwähnte Multiplikatoreffekt der höheren Hierarchieebenen dazu führt, dass die Löhne stärker mit der Hierarchieebene steigen, als die Fähigkeiten der Mitarbeiter

Literaturüberblick II

- *Waldman (1984)* und *Qian (1994)* zeigen ferner, dass die Mitarbeiter an der Spitze von großen Unternehmen, gemessen an der Zahl der Beschäftigten, ein höheres Entgelt erhalten als diejenigen bei kleinen Unternehmen, da der genannte Multiplikatoreffekt bei diesen großen Unternehmen stärker ist

Hierarchie = Relation I

- Die Hierarchie durch eine Funktion S abgebildet, die jedem Spieler $i \in N$ seine direkt untergebenen Spieler zuordnet
- S wird als gerichteter Graph bzw. Kontrollstruktur (engl.: permission structure) bezeichnet
- Ein hierarchisches Spiel ist das Tupel (v, S)
- $S(i)$ bezeichnet die Menge der direkt untergebenen Spieler von i bzw. die direkten Nachfolger von i; $i \notin S(i)$
- $S^{-1}(i) = \{j \in N : i \in S(j)\}$ Menge von is direkt vorgesetzten Spielern bzw. direkten Vorgängern
- Ein Pfad T in N von i zu j ist eine Sequenz von Spielern $T(i \to j) = \langle r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}, r_k \rangle$ mit $i = r_0$, $j = r_k$ und $S(r_\ell) = r_{\ell+1}$ für alle $\ell = 0, \ldots, k-1$
- Der Pfad kann als "Befehlskette" zwischen den Spielern i und j interpretiert werden, wobei Spieler i ein direkter oder indirekter Vorgänger von Spieler j ist

Hierarchie = Relation II

- Menge aller Spieler, die einem Agenten i direkt oder indirekt unterstehen, wird mit $\hat{S}(i)$,
  $\hat{S}(i) := \{j \in N \backslash \{i\} : \text{es existiert ein Pfad von } i \text{ zu } j\}$,
  bezeichnet
- Die Menge von is direkten und indirekten Vorgängern wird mit $\hat{S}^{-1}(i)$,
  $\hat{S}^{-1}(i) := \{j \in N \backslash \{i\} : \text{es existiert ein Pfad von } j \text{ zu } i\}$,
  angesprochen
- Für eine Hierarchie wird eine Baumstruktur angenommen (siehe Begriffsklärung):
  - es existiert ein Spieler $i_0 \in N$, so dass $S^{-1}(i_0) = \emptyset$ und $\hat{S}(i_0) = N \backslash \{i_0\}$ gilt,
  - für jeden Spieler $i \in N \backslash \{i_0\}$ ist $\left|S^{-1}(i)\right| = 1$ erfüllt und
  - es gilt $i \notin \hat{S}(i)$ für alle $i \in N$

Hierarchie = Relation III

Example

Die Spielermenge ist durch $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben. Die Hierarchie auf dieser Spielermenge wird durch $S(3) = S(4) = S(5) = \emptyset$, $S(2) = \{3, 4\}$ und $S(1) = \{2, 5\}$ beschrieben.
Zeichnen Sie die Hierarchie! Bestimmen Sie $\hat{S}^{-1}(3)$ sowie $T(1 \longrightarrow 3)$!

Hierarchie = Relation IV

- Die Hierarchie S bestimmt, in Anlehnung an *Gilles/Owen/van den Brink (1992)*, eine Partition bzw. Leveleinteilung $\mathfrak{L} = (L_0, .., L_M)$ der Spielermenge N mit

Hierarchie = Relation IV

- Die Hierarchie S bestimmt, in Anlehnung an *Gilles/Owen/van den Brink (1992)*, eine Partition bzw. Leveleinteilung $\mathfrak{L} = (L_0, .., L_M)$ der Spielermenge N mit
  - $L_0 = \{i_0\}$ und

Hierarchie = Relation IV

- Die Hierarchie S bestimmt, in Anlehnung an *Gilles/Owen/van den Brink (1992)*, eine Partition bzw. Leveleinteilung $\mathfrak{L} = (L_0, .., L_M)$ der Spielermenge N mit
  - $L_0 = \{i_0\}$ und
  - $L_k = \left\{ i \in N \backslash \bigcup_{u=0}^{k-1} L_u : S^{-1}(i) \subseteq L_{k-1} \right\}$, $1 \leq k \leq M$, $L_M \neq \emptyset$ und $L_{M+1} = \emptyset$

Hierarchie = Relation IV

- Die Hierarchie S bestimmt, in Anlehnung an *Gilles/Owen/van den Brink (1992)*, eine Partition bzw. Leveleinteilung $\mathfrak{L} = (L_0, .., L_M)$ der Spielermenge N mit
  - $L_0 = \{i_0\}$ und
  - $L_k = \left\{ i \in N \backslash \bigcup_{u=0}^{k-1} L_u : S^{-1}(i) \subseteq L_{k-1} \right\}$, $1 \leq k \leq M$, $L_M \neq \emptyset$ und $L_{M+1} = \emptyset$
- Der Abstand zu Spieler i_0 entscheidend über die Zuordnung zu einem Level $\longrightarrow$ top-down-Hierarchie

Hierarchie = Relation IV

- Die Hierarchie S bestimmt, in Anlehnung an *Gilles/Owen/van den Brink (1992)*, eine Partition bzw. Leveleinteilung $\mathfrak{L} = (L_0, .., L_M)$ der Spielermenge N mit
  - $L_0 = \{i_0\}$ und
  - $L_k = \left\{ i \in N \backslash \bigcup_{u=0}^{k-1} L_u : S^{-1}(i) \subseteq L_{k-1} \right\}, 1 \leq k \leq M,\ L_M \neq \emptyset$ und $L_{M+1} = \emptyset$
- Der Abstand zu Spieler i_0 entscheidend über die Zuordnung zu einem Level $\longrightarrow$ top-down-Hierarchie
- Im Beispiel führt die top-down-Leveldefinition zur Leveleinteilung $L_0 = \{1\}$, $L_1 = \{2, 5\}$ und $L_2 = \{3, 4\}$

Hierarchie = Relation IV

- Die Hierarchie S bestimmt, in Anlehnung an *Gilles/Owen/van den Brink (1992)*, eine Partition bzw. Leveleinteilung $\mathfrak{L} = (L_0, .., L_M)$ der Spielermenge N mit
  - $L_0 = \{i_0\}$ und
  - $L_k = \left\{ i \in N \backslash \bigcup\limits_{u=0}^{k-1} L_u : S^{-1}(i) \subseteq L_{k-1} \right\}$, $1 \leq k \leq M$, $L_M \neq \emptyset$ und $L_{M+1} = \emptyset$
- Der Abstand zu Spieler i_0 entscheidend über die Zuordnung zu einem Level $\longrightarrow$ top-down-Hierarchie
- Im Beispiel führt die top-down-Leveldefinition zur Leveleinteilung $L_0 = \{1\}$, $L_1 = \{2, 5\}$ und $L_2 = \{3, 4\}$
- In der bottom-up-Leveldefinition würde sich folgende Leveleinteilung ergeben: $L_0 = \{1\}$, $L_1 = \{2\}$ und $L_2 = \{3, 4, 5\}$

Gewichtete Hierarchien: Idee I

- (Unternehmens-) Hierarchie dargestellt als Baumstruktur
- Der Vektor w ordnet jedem Mitarbeiter i ein Gewicht w_i, $0 \leq w_i \leq 1$, zu, das über die Stärke der Partizipation des Vorgesetzten an den (Miss-) Erfolgen seiner Mitarbeiter Auskunft gibt; ein Mitarbeiter i muss den Anteil w_i seines (Miss-)Erfolgs an den Vorgesetzten abtreten, $w_{i_0} = 0$
- Weist ein Gewichtsvektor allen Mitarbeitern, außer i_0, das gleiche Gewicht $\bar{w}$ zu, wird der Vektor mit $\bar{w}$ bezeichnet
- Der Gewichtsvektor $w\left[K\right]$ weist allen $i \in K$ das Gewicht null zu
- Ein gewichtetes hierarchisches Spiel ist das Tupel (v, S, w)

Gewichtete Hierarchien: Idee II

Example

Ein Unternehmen beschäftigt fünf Mitarbeiter, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Die hierarchische Struktur ist durch $S(3) = S(4) = S(5) = \varnothing$,
$S(2) = \{3, 4\}$, $S(1) = \{2, 5\}$ sowie den Gewichtsvektor
$w = (w_1, ..., w_5) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ gegeben.
Zeichnen Sie die gewichtete Hierarchie!

Berechnung I

- Idee: Ein Mitarbeiter i auf der untersten Ebene, $S(i) = \varnothing$, muss von seiner Shapley-Auszahlung den Anteil w_i an seinen direkten Vorgesetzten j, $S^{-1}(i) = \{j\}$, abführen. Dieser wiederum muss von seinen insgesamt erhaltenen (Brutto-)Zahlungen, seine Shapley-Auszahlung und die Zahlungen seiner direkten Mitarbeiter an ihn, den Anteil w_j an seinen direkten Vorgesetzten weiterreichen etc.
- Alle Mitarbeiter j, für die $j \in \hat{S}^{-1}(g)$ gilt, erhalten einen Anteil der Shapley-Auszahlung des Mitarbeiters g
- Ein beliebiger Beschäftigter $i \in N$ erhält von der Shapley-Auszahlung des Mitarbeiters g den Anteil:

$$f_i(S, w, g) = \begin{cases} [1 - w_i] \prod\limits_{\substack{l \in \hat{S}(i), \\ l \in T(i_0 \to g)}} w_l, & i \in T(i_0 \to g), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnung II

- Mit Hilfe dieser Anteile kann die Auszahlung $H_i(v, S, w)$, die ein Mitarbeiter $i \in N$ auf Grund des H-Entlohnungsschemas erhält, bestimmt werden als:

$$H_i(v, S, w) = \sum_{j=1}^{n} f_i(S, w, j) \cdot \mathrm{Sh}_j(v)$$

Berechnung II

- Mit Hilfe dieser Anteile kann die Auszahlung $H_i(v, S, w)$, die ein Mitarbeiter $i \in N$ auf Grund des H-Entlohnungsschemas erhält, bestimmt werden als:

$$H_i(v, S, w) = \sum_{j=1}^{n} f_i(S, w, j) \cdot \mathrm{Sh}_j(v)$$

- Ergänzung des Beispiels um die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| \leq 1 \\ 10, & |K| = 2 \\ 20, & |K| = 3 \\ 40, & |K| = 4 \\ 60, & K = N. \end{cases}$$

Berechnung II

- Mit Hilfe dieser Anteile kann die Auszahlung $H_i(v, S, w)$, die ein Mitarbeiter $i \in N$ auf Grund des H-Entlohnungsschemas erhält, bestimmt werden als:

$$H_i(v, S, w) = \sum_{j=1}^{n} f_i(S, w, j) \cdot \mathrm{Sh}_j(v)$$

- Ergänzung des Beispiels um die Koalitionsfunktion

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| \leq 1 \\ 10, & |K| = 2 \\ 20, & |K| = 3 \\ 40, & |K| = 4 \\ 60, & K = N. \end{cases}$$

- $\mathrm{Sh}_i(v) = 12$

Berechnung III

$$H_5\left(v,S,w\right)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{1-w_5}\cdot\underbrace{12}_{\mathrm{Sh}_5(v)}=9$$

$$H_4\left(v,S,w\right)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{1-w_4}\cdot\underbrace{12}_{\mathrm{Sh}_4(v)}=6$$

$$H_3\left(v,S,w\right)=\underbrace{\left(1-\frac{2}{3}\right)}_{1-w_3}\cdot\underbrace{12}_{\mathrm{Sh}_3(v)}=4$$

Berechnung IV

$$H_2\left(v, S, w\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{1-w_2} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{12}_{\mathrm{Sh}_2(v)} + \frac{2}{3} \cdot \underbrace{12}_{H_3(v,S,w[3])} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{12}_{H_4(v,S,w[4])}\right)}_{H_2(v,S,w[2])}$$

$$= 19,5$$

$$H_1\left(v, S, w\right) = \underbrace{12}_{\mathrm{Sh}_1(v)} + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{26}_{H_2(v,S,w[2])} + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{12}_{H_5(v,S,w[5])}$$

$$= 21,5$$

Berechnung V

Example

Bestimmen Sie die H-Auszahlungen der Spieler für das gewichtete hierarchische Spiel $N = \{1, 2, 3\}$,

$$v(K) = \begin{cases} 0, & |K| \leq 1 \\ 10, & |K| = 2 \\ 30, & |K| = 3, \end{cases}$$

$w = (w_1, w_2, w_3) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$ u. $S(1) = \{2, 3\}$; $S(2) = S(3) = \varnothing$.

Example

Bestimmen Sie die *H*-Auszahlungen der Spieler für das gewichtete hierarchische Spiel $N = \{1, 2, 3\}$, $v_{\{1\},\{2,3\}}$, $S(2) = \{1, 3\}$ sowie $S(1) = S(3) = \varnothing$ und $w = (w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

Axiomatisierung I

- Die ersten vier Axiome stellen sicher, dass, wenn alle Gewichte null sind, für die *H*-Auszahlungen der Mitarbeiter deren Shapley-Auszahlungen resultieren

Definition (Effizienz-Axiom)

$$\sum_{i \in N} \sigma_i \left(v, S, w\right) = v\left(N\right).$$

Definition (Additivitäts-Axiom)

Für zwei Koalitionsfunktionen v und v' gilt

$$\sigma_i \left(v + v', S, w\right) = \sigma_i \left(v, S, w\right) + \sigma_i \left(v', S, w\right)$$

für alle $i \in N$.

Axiomatisierung II

Definition (Schwache-Nullspieler-Axiom)

Ein Mitarbeiter i, für den $v(K) = v(K \cup \{i\})$ für alle $K \subseteq N$ gilt, erhält die Auszahlung $\sigma_i(v, S, w[N]) = 0$.

Definition (Schwache-Symmetrie-Axiom)

Gilt für zwei Mitarbeiter i und j aus N im Spiel (v) $v(K \cup \{j\}) = v(K \cup \{i\})$ für alle $K \subseteq N \setminus \{i, j\}$, so sollen beide gleich entlohnt werden, wenn der Gewichtsvektor $w[N]$ lautet, $\sigma_i(v, S, w[N]) = \sigma_j(v, S, w[N])$.

Axiomatisierung III

Die zweite Axiomengruppe beinhaltet vier Axiome, die die umverteilende Wirkung der Hierarchie herbeiführt

Definition (Brutto-Netto-Axiom)

$$\sigma_i\left(v, S, w\right) = \left(1 - w_i\right) \cdot \sigma_i\left(v, S, w\left[i\right]\right).$$

Definition (Abspaltungs-Axiom)

Wenn für zwei Mitarbeiter $i, j,\ j \in S\left(i\right)$ gilt, so verlangt das Axiom, dass

$$\begin{aligned} & \sigma_i\left(v, S, w\left[i\right]\right) - \sigma_i\left(v, S, w\left[i, j\right]\right) \\ = \ & \sigma_j\left(v, S, w\left[j\right]\right) - \sigma_j\left(v, S, w\right) \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Axiomatisierung IV

Definition (Isolations-Axiom)

Für die Auszahlung aller $i \in N$ gilt:

$$\sigma_i \left(v, S, w \left[\{i\} \cup S\left(i\right)\right]\right) = \sigma_i \left(v, S, w \left[N\right]\right)$$

Definition (Unabhängigkeits-Axiom)

Nimmt ein Mitarbeiter $i \in N$ an zwei hierarchischen Spielen (v, S, w) und (v, S, w') teil, für Gewichtsvektoren w und w' gilt $w_j = w'_j$ für alle $j \in \hat{S}\left(i\right) \cup \{i\}$, so folgt für is Auszahlungen

$$\sigma_i \left(v, S, w\right) = \sigma_i \left(v, S, w'\right)$$

Personalpolitische Implikationen: Entlohnung I

Definition

Ein Mitarbeiter i wird als *unwesentlich* bezeichnet, wenn $v(K) = v(K \setminus \{j\})$ mit $j \in \left(\hat{S}(i) \cup \{i\}\right)$ für jede Koalition $K \subseteq N$ erfüllt ist.

Corollary

Ein unwesentlicher Mitarbeiter erhält vom H-Entlohnungsschema die Auszahlung null zugewiesen.

Personalpolitische Implikationen: Entlohnung II

Definition

Ein *einflussloser unproduktiver* Mitarbeiter i ist dadurch gekennzeichnet, dass $v(K) = v(K \backslash \{i\})$ für jede Koalition $K \subseteq N$ und zugleich $w_j = 0$ für alle $j \in S(i)$ erfüllt ist.

Corollary

Einem einflusslosen unproduktiven Mitarbeiter wird vom H-Entlohnungsschema die Auszahlung null zugewiesen.

Corollary

Einem unproduktiven Mitarbeiter i, für den $S(i) = \varnothing$ gilt, wird eine Auszahlung null zugeordnet.

Personalpolitische Implikationen: Entlohnung III

Theorem

Wird in einem Unternehmen für alle Beziehungen zwischen Vorgesetzten und Mitarbeitern $i \in N \setminus \{i_0\}$ *ein einheitliches Gewicht* $\bar{w}$ *verwendet,* $0 < \bar{w} < 1$*, und alle Mitarbeiter erzielen eine positive Shapley-Auszahlung,* $\mathrm{Sh}_i(v) > 0$*, dann existiert ein* $\bar{w}$ *so, dass für alle Mitarbeiter* $i, j \in N$ *mit* $j \in S(i)$
$H_j(v, S, \bar{w}) < H_i(v, S, \bar{w})$ *erfüllt ist.*

Personalpolitische Implikationen: Entlohnung IV

Definition

Ein Unternehmen wird als symmetrisch bezeichnet, wenn

- $\mathrm{Sh}_i\left(v\right) =: \overline{\mathrm{Sh}}\left(v\right)$ für alle $i \in N$ gilt,
- $w_i = \bar{w}$, $0 < \bar{w} < 1$, für alle $i \in N \backslash \left\{i_0\right\}$ erfüllt ist sowie
- $\left|S\left(i\right)\right| = s \geq 1$ für alle $i \in N \backslash L_M$ eingehalten wird.

Theorem

In einem symmetrischen Unternehmen mit monotoner Koalitionsfunktion v, $v\left(N\right) > 0$, gilt: $H_i\left(v, S, w\right) \geq H_j\left(v, S, w\right)$ für alle $i \in L_k$, $j \in L_{k+1}$, $0 \leq k \leq M - 1$.

Personalpolitische Implikationen: Allokation I

- Abstrakte hierarchische Struktur (P, T, m)

Personalpolitische Implikationen: Allokation I

- Abstrakte hierarchische Struktur (P, T, m)
- Mit P wird die Menge aller Positionen bezeichnet

Personalpolitische Implikationen: Allokation I

- Abstrakte hierarchische Struktur (P, T, m)
- Mit P wird die Menge aller Positionen bezeichnet
- Die Funktion T legt die Beziehung zwischen den Positionen fest

Personalpolitische Implikationen: Allokation I

- Abstrakte hierarchische Struktur (P, T, m)
- Mit P wird die Menge aller Positionen bezeichnet
- Die Funktion T legt die Beziehung zwischen den Positionen fest
- Der Vektor mit den positionsbezogenen Gewichten wird mit m bezeichnet, $m_o = 0$

Personalpolitische Implikationen: Allokation I

- Abstrakte hierarchische Struktur (P, T, m)
- Mit P wird die Menge aller Positionen bezeichnet
- Die Funktion T legt die Beziehung zwischen den Positionen fest
- Der Vektor mit den positionsbezogenen Gewichten wird mit m bezeichnet, $m_o = 0$
- Die Verbindung zwischen der abstrakten hierarchischen Struktur und dem Spiel (v) stellt die Besetzungsfunktion/Zuordnung β her, $\beta : N \to P$

Personalpolitische Implikationen: Allokation I

- Abstrakte hierarchische Struktur (P, T, m)
- Mit P wird die Menge aller Positionen bezeichnet
- Die Funktion T legt die Beziehung zwischen den Positionen fest
- Der Vektor mit den positionsbezogenen Gewichten wird mit m bezeichnet, $m_o = 0$
- Die Verbindung zwischen der abstrakten hierarchischen Struktur und dem Spiel (v) stellt die Besetzungsfunktion/Zuordnung β her, $\beta : N \to P$
- Die Menge aller Zuordnungen wird mit $B\,(T, N)$ bezeichnet

Personalpolitische Implikationen: Allokation II

- Zu jedem β existiert eine Hierarchie S^{β} sowie ein Gewichtsvektor w^{β}

Personalpolitische Implikationen: Allokation II

- Zu jedem β existiert eine Hierarchie S^β sowie ein Gewichtsvektor w^β
- Die Menge der direkten Beschäftigten von Mitarbeiter i unter β ergibt sich als $S^\beta(i) := \beta^{-1}(T(\beta(i)))$

Personalpolitische Implikationen: Allokation II

- Zu jedem β existiert eine Hierarchie S^{β} sowie ein Gewichtsvektor w^{β}
- Die Menge der direkten Beschäftigten von Mitarbeiter i unter β ergibt sich als $S^{\beta}(i) := \beta^{-1}(T(\beta(i)))$
- Das Gewicht eines Mitarbeiters i wird ermittelt über $w_i^{\beta} := m(\beta(i))$

Personalpolitische Implikationen: Allokation III

Definition

Die Funktion T bestimmt eine Leveleinteilung $\mathfrak{L}^P = \left(L_0^P, .., L_M^P\right)$ der Positionen P mit

- $L_0^P = \{o\}$
- $L_k^P = \left\{x \in P \setminus \bigcup_{u=0}^{k-1} L_u^P : T^{-1}(x) \subseteq L_{k-1}^P\right\}, 1 \leq k \leq M,$ $L_M^P \neq \varnothing$ und $L_{M+1}^P = \varnothing$.

- Aus der Leveldefinition für die Positionen und der Zuordnung β kann die Leveleinteilung der Mitarbeiter gewonnen werden über $L_k^\beta := \beta^{-1}\left(L_k^P\right)$

Personalpolitische Implikationen: Allokation IV

Definition

Eine abstrakte hierarchische Struktur eines Unternehmens wird als symmetrisch hinsichtlich ihrer Gewichte bezeichnet, wenn für alle $x \in L_k^P$ (mit $k = 0, ..., M$) $m_x =: m_{L_k^P}$ erfüllt ist.

Personalpolitische Implikationen: Allokation V

Theorem

Sei ein Unternehmen mit symmetrischer abstrakter hierarchischer Struktur (P, T, m) *, mit* $0 < m_x < 1$ *für alle* $x \in P \setminus \{o\}$ *, sowie dem Tupel* (v) *, mit* $|N| = |P|$ *, gegeben. Mitarbeiter* i_0*, welcher bereits der Position* o *zugeordnet wurde,* $\beta^{-1}(o) = i_0$*, entscheidet über die weitere Ausgestaltung der Funktion* β*. Er wählt dabei jene Zuordnung* β_{opt}*, die seine Auszahlung maximiert:*

$$\beta_{opt} \in \underset{\beta \in B(T,N), \beta(o) = i_0}{\arg\max} H_{i_0}\left(v, w^{\beta}, S^{\beta}\right).$$

Resultat ist eine Zuordnung der Mitarbeiter auf die verschiedenen Positionen, so dass aus $i \in L_k^{\beta}$ *und* $j \in L_l^{\beta}$*, mit* $1 \leq k \leq l \leq M$*,* $\mathrm{Sh}_i(v) \geq \mathrm{Sh}_j(v)$ *folgt.*

Personalpolitische Implikationen: Allokation VI

Corollary

Hat Mitarbeiter i_0 *die übrigen Beschäftigten entsprechend ihrer Produktivität den einzelnen Ebenen zugeordnet, so hat kein Mitarbeiter aus* $N \setminus \{i_0\}$ *einen Anreiz, in dem bei ihm beginnenden Teil der Hierarchie die Zuordnung der Mitarbeiter zu den einzelnen Positionen abzuändern.*

- Das dargestellte Ergebnis zur Allokation der Mitarbeiter stellt allerdings nicht sicher, dass der Beschäftigte, der auf Position o festgelegt wurde, auch dieser zugewiesen sein möchte

Zusammenfassung

- Das H-Entlohnungsschema berücksichtigt zum einen die Leistung der Mitarbeiter. Zum anderen wird die Idee aufgegriffen, dass Vorgesetzte am (Miss-)Erfolg ihrer Mitarbeiter partizipieren

Zusammenfassung

- Das H-Entlohnungsschema berücksichtigt zum einen die Leistung der Mitarbeiter. Zum anderen wird die Idee aufgegriffen, dass Vorgesetzte am (Miss-)Erfolg ihrer Mitarbeiter partizipieren
- Für einen Spezialfall, den des symmetrischen Unternehmens, wurde gezeigt, dass jeder Vorgesetzte unabhängig vom gewählten Gewichtsvektor $\bar{w}$, mit $0 < \bar{w} < 1$, eine höhere Entlohnung erhält als die ihm zugeordneten Mitarbeiter

Zusammenfassung

- Das H-Entlohnungsschema berücksichtigt zum einen die Leistung der Mitarbeiter. Zum anderen wird die Idee aufgegriffen, dass Vorgesetzte am (Miss-)Erfolg ihrer Mitarbeiter partizipieren
- Für einen Spezialfall, den des symmetrischen Unternehmens, wurde gezeigt, dass jeder Vorgesetzte unabhängig vom gewählten Gewichtsvektor $\bar{w}$, mit $0 < \bar{w} < 1$, eine höhere Entlohnung erhält als die ihm zugeordneten Mitarbeiter
- Es konnte erklärt werden, weshalb produktivere Mitarbeiter höheren Hierarchieebenen zugeordnet sind