

Vorkurs Mikroökonomik

Das Haushaltsoptimum

Harald Wiese

Universität Leipzig

Einführung

- Haushaltstheorie
 - Das Budget
 - Präferenzen, Indifferenzkurven und Nutzenfunktionen
 - **Das Haushaltsoptimum**
 - Komparative Statik
 - Entscheidungen über Arbeitsangebot und Sparen
 - Marktnachfrage und Erlöse
- Unternehmenstheorie
- Haushaltstheorie 2
- Vollkommene Konkurrenz und Wohlfahrtstheorie
- Marktformenlehre

- Maximierungsproblem des Haushalts
- Marginale Zahlungsbereitschaft versus marginale Opportunitätskosten
- Streng konvexe Präferenzen
- Konkave Präferenzen
- Perfekte Komplemente
- Die Ausgabenfunktion

Maximierungsproblem des Haushalts

Haushaltsoptimum =

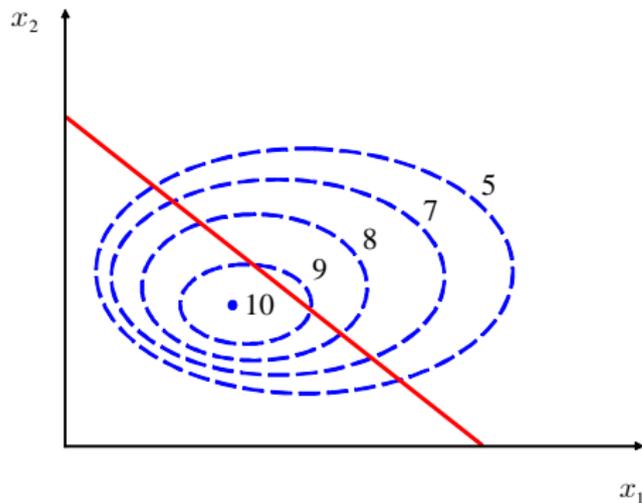
- Güterkombination, die den **Nutzen** des Haushalts unter **Einhaltung seines Budgets maximiert:**

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \\ \text{u. d. N. } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \end{aligned}$$

bzw. bei Anfangsausstattung

$$\text{u. d. N. } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2$$

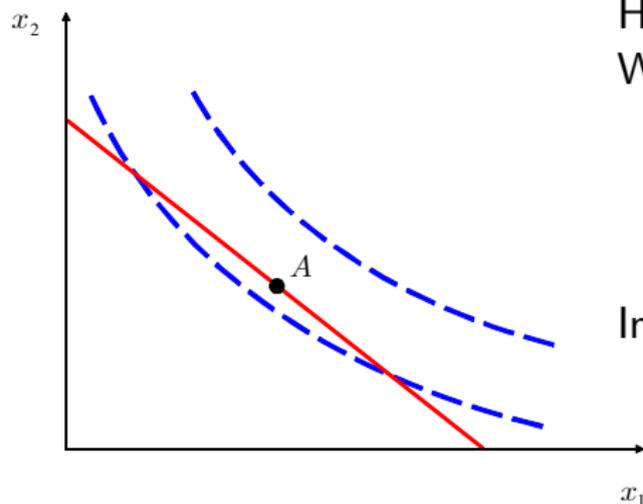
Maximierungsproblem des Haushalts



Problem

Welche Güterkombination ist das Haushaltsoptimum?

Maximierungsproblem des Haushalts



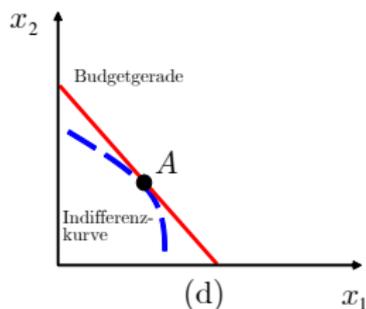
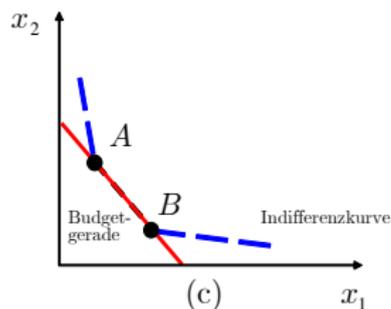
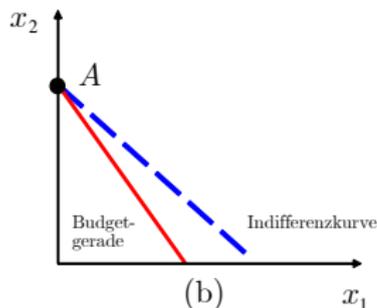
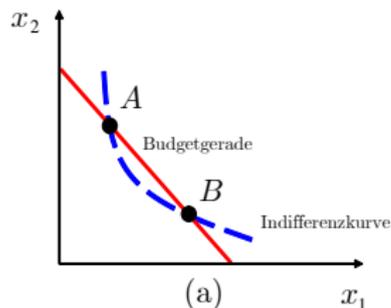
Haushaltsoptimum:

Wähle ein Güterbündel auf der

- höchsten (Maximierung)
- erreichbaren (innerhalb des Budgets)

Indifferenzkurve!

Vier Maximierungsprobleme



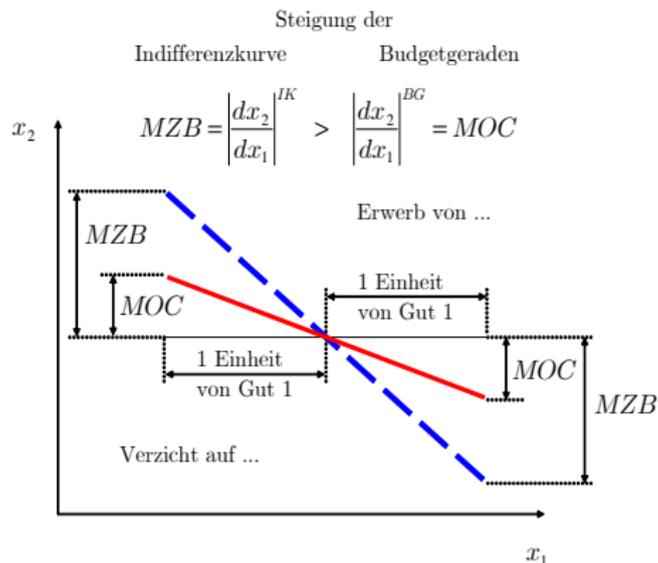
Problem

Sind die Punkte A oder B bei monotonen Präferenzen optimal?

Marginale Zahlungsbereitschaft MZB versus marginale Opportunitätskosten MOC

- Marginale **Zahlungsbereitschaft**:
Auf wie viele Einheiten von Gut 2 **kann** der Konsument beim Konsum einer zusätzlichen Einheit von Gut 1 verzichten, damit er zwischen beiden Güterbündeln indifferent ist?
- Marginale **Opportunitätskosten**:
Auf wie viele Einheiten von Gut 2 **muss** der Konsument beim Konsum einer zusätzlichen Einheit von Gut 1 aufgrund der Budgetrestriktion verzichten?

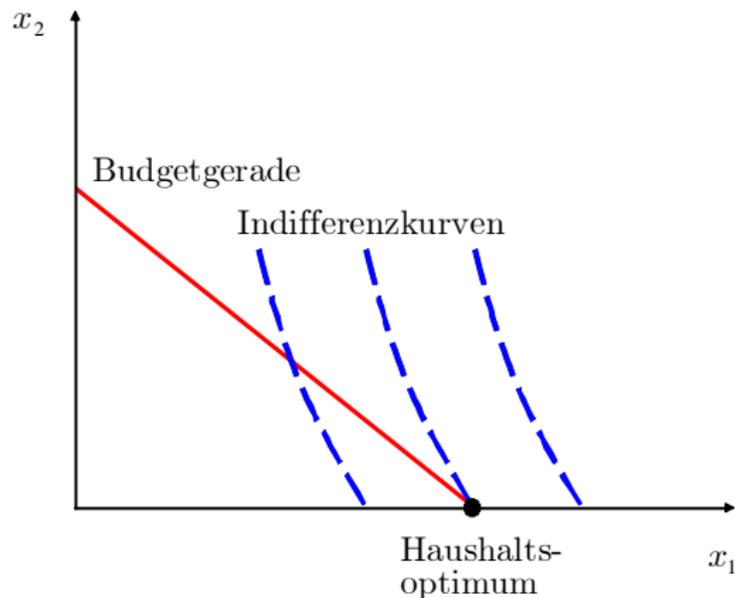
MZB versus MOC



Also: Es lohnt sich, den Konsum um eine Einheit auszudehnen.

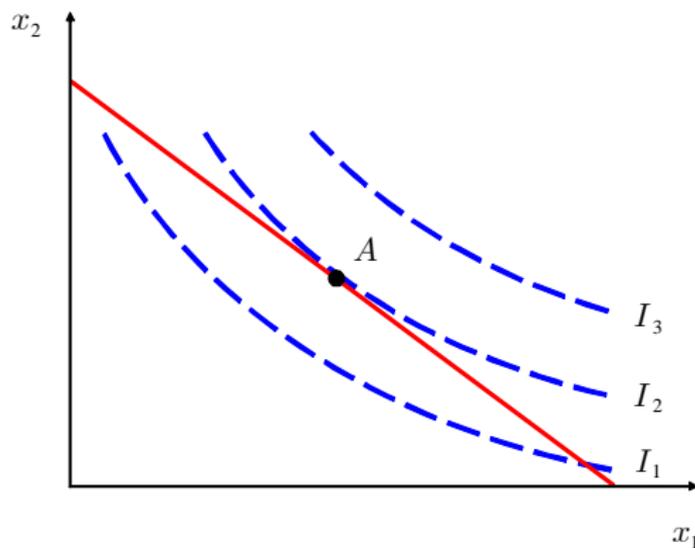
MZB versus MOC

$MRS > MOC \Rightarrow$ erhöhe x_1 (falls möglich)



Streng konvexe Präferenzen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktion



① $MRS \stackrel{!}{=} MOC$

② $p_1 x_1 + p_2 x_2 \stackrel{!}{=} m$

Streng konvexe Präferenzen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

Bei Cobb-Douglas-Nutzenfunktionen $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ lautet das Verhältnis der Grenznutzen

$$MRS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{ax_1^{a-1}x_2^{1-a}}{(1-a)x_1^ax_2^{-a}} = \frac{x_2}{x_1} \frac{a}{1-a}$$

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten liefern das Haushaltsoptimum:

$$\begin{aligned}x_1^* &= a \frac{m}{p_1} \\x_2^* &= (1-a) \frac{m}{p_2}\end{aligned}$$

Streng konvexe Präferenzen

Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

Problem

Olaf hat die Nutzenfunktion $U(D, C) = \sqrt{DC}$

- $D =$ Anzahl der Diskobesuche pro Monat und*
- $C =$ Anzahl der Konzertbesuche pro Monat*

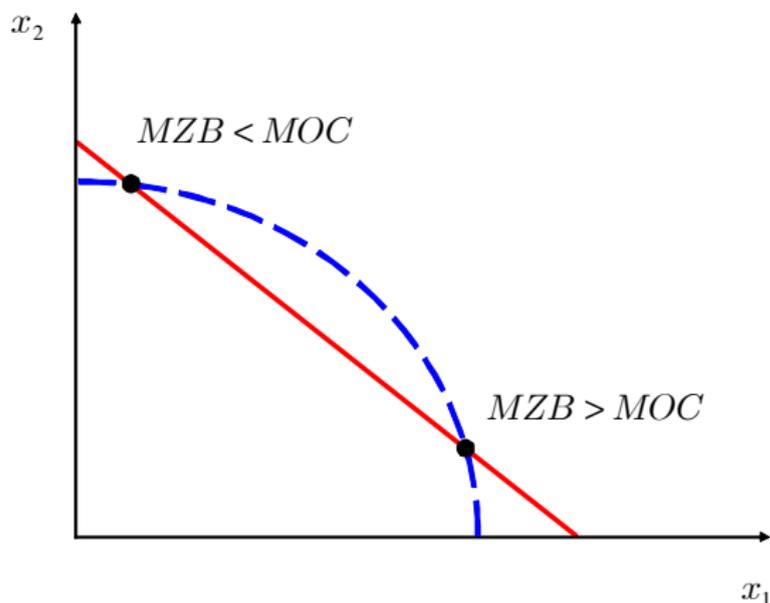
Das Budget ist durch

- $p_D = € 2,00 /$ Diskobesuch,*
- $p_C = € 4,00 /$ Konzertbesuch und*
- $m = € 64,00$*

gegeben.

*Anstelle von $U(D, C) = \sqrt{DC}$ auch $(U(D, C))^2 = DC$ möglich?
Bestimmen Sie die von Olaf nachgefragten Mengen!*

Konkave Präferenzen



- $MRS > MOC \Rightarrow$ erhöhe x_1 (falls möglich)
- $MRS < MOC \Rightarrow$ reduziere x_1 (falls möglich)

Konkave Präferenzen

konkretes Beispiel

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Die Erhöhung des Konsums von Gut 1 erhöht den Nutzen, falls

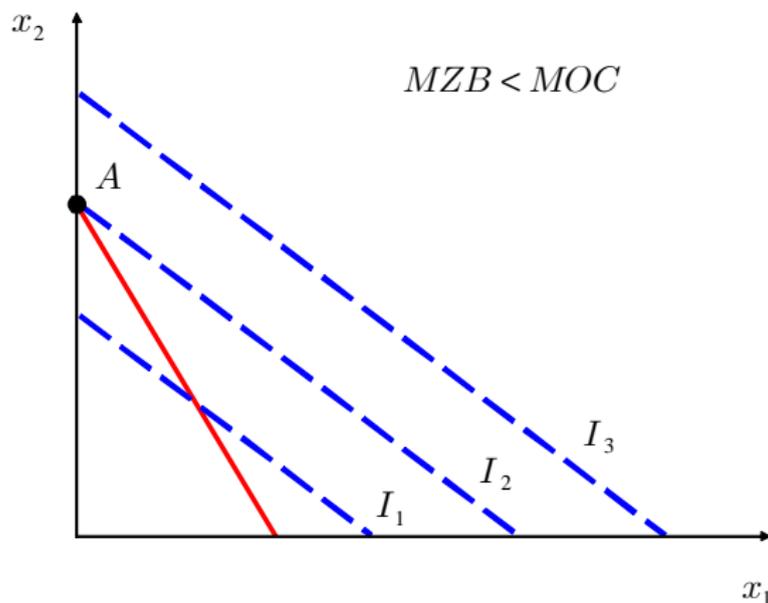
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2x_1}{2x_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = MRS > MOC = \frac{p_1}{p_2}$$

gilt. Also (fast immer) Randlösungen:

$$x^*(m, p) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), & p_1 \leq p_2 \\ \left\{ \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), \left(0, \frac{m}{p_2}\right) \right\} & p_1 = p_2 \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) & p_1 \geq p_2 \end{cases}$$

Perfekte Substitute

graphische Lösung



$MRS < MOC \Rightarrow$ reduziere x_1 (falls möglich)

Perfekte Substitute

analytische Lösung

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \text{ mit } a > 0 \text{ und } b > 0$$

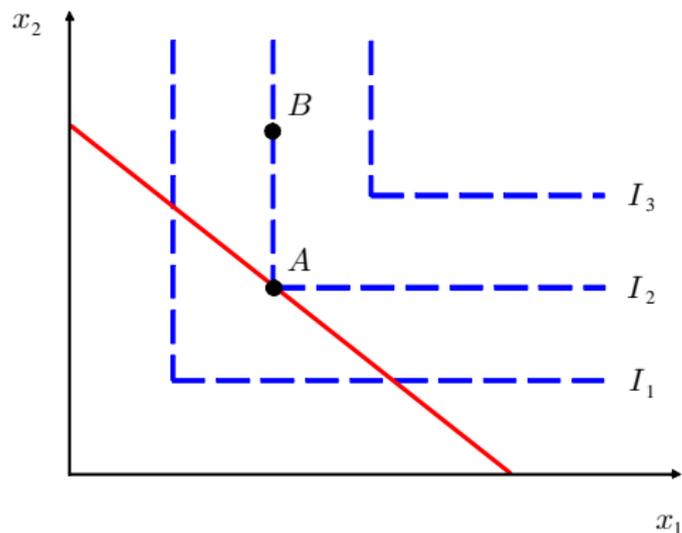
Die Erhöhung des Konsums von Gut 1 erhöht den Nutzen, falls

$$\frac{a}{b} = MRS > MOC = \frac{p_1}{p_2}$$

gilt. Also (fast immer) Randlösungen:

$$x^*(m, p) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0 \right), & \frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2} \\ \left\{ \left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \in \left[0, \frac{m}{p_1} \right] \right\} & \frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2} \\ \left(0, \frac{m}{p_2} \right) & \frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Perfekte Komplemente



- 1 Eckpunkte bestimmen!
- 2 $p_1 x_1 + p_2 x_2 \stackrel{!}{=} m$

Perfekte Komplemente

$$U(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2)$$

- Eckpunkte

$$ax_1 \stackrel{!}{=} bx_2 \text{ oder} \\ x_2 \stackrel{!}{=} \frac{a}{b}x_1$$

- Budgetgleichung

$$m \stackrel{!}{=} p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1 + p_2\frac{a}{b}x_1 = x_1\left(p_1 + \frac{a}{b}p_2\right)$$

- Für das erste Gut erhält man so

$$x_1^* = \frac{m}{p_1 + \frac{a}{b}p_2}.$$

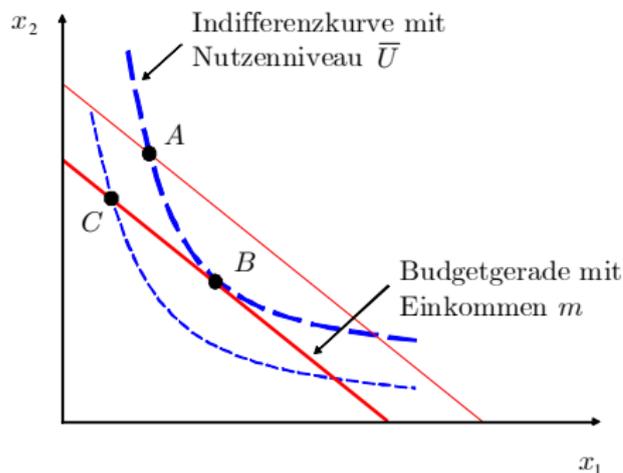
Problem

Bestimmen Sie Haushaltsoptima bei variablem Einkommen m

- *für die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$ und die Preise $p_1 = 1$ und $p_2 = 2$;*
- *für lexikographische Präferenzen mit 1 als wichtigem Gut und die Preise $p_1 = 2$ und $p_2 = 5$;*
- *für die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ und die Preise $p_1 = 1$ und $p_2 = 3$;*
- *für die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \min(x_1, 2x_2)$ und die Preise $p_1 = 1$ und $p_2 = 3$!*

Maximierungs- und Minimierungsproblem

- Maximierung: Finde das Güterbündel, das den Nutzen bei gegebener Budgetlinie maximiert!
- Minimierung: Finde das Güterbündel, das die Ausgaben, die für ein vorgegebenes Nutzenniveau notwendig sind, minimiert.



Die Ausgabenfunktion

$$e(p_1, p_2, \bar{U}) := \min_{x_1, x_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2) \\ \text{mit } \bar{U} = U(x_1, x_2)$$

Haushaltsoptimum: kompensierte Nachfrage

$$\chi_1(p_1, p_2, \bar{U}) \text{ und } \chi_2(p_1, p_2, \bar{U})$$

Kompensiert: Um bei Preiserhöhungen das Nutzenniveau zu halten, ist das Einkommen kompensierend zu erhöhen.

Die Ausgabenfunktion

Funktion	Argumente	Optimum
Nutzenfunktion	Gütermengen, Budget	$x_1(p_1, p_2, m)$, $x_2(p_1, p_2, m)$
Ausgabenfunktion	Nutzenniveau, Preise	$\chi_1(p_1, p_2, \bar{U})$, $\chi_2(p_1, p_2, \bar{U})$

Die Ausgabenfunktion

- χ_1 und $\chi_2 =$ **Hicks'sche Nachfrage** (kompensierte Nachfrage):
gibt an, mit welchem Güterbündel ein angestrebtes Nutzenniveau mit geringstmöglichen Ausgaben erreicht wird.
- x_1 und $x_2 =$ **Marshall'sche Nachfrage**:
gibt an, mit welchem Güterbündel das maximale Nutzenniveau bei gegebenem Einkommen erreicht wird.
- Fast immer gilt:

$$x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{U})) = \chi_1(p_1, p_2, \bar{U}).$$

Die Ausgabenfunktion

Problem

Bestimmen Sie die Ausgabenfunktion für die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ mit $0 < a < 1$! Geben Sie auch die Gütermengen an, die bei einem vorgegebenen Nutzenniveau die Ausgaben minimieren! Hinweis: Sie können mit den Gütermengen $x_1^* = a \frac{m}{p_1}$ und $x_2^* = (1-a) \frac{m}{p_2}$ arbeiten. Wählen Sie den Ansatz $\bar{U} = U(x_1^*, x_2^*)$ und ermitteln Sie das Budget $m = e(p_1, p_2, \bar{U})$, das für den vorgegebenen Nutzen \bar{U} notwendig ist!

Aufgabe D.9.1.

Ein Viehzüchter lebt von Milch (Gut 1) und Brot (Gut 2). Er melkt jeden Tag seine Kuh und erhält dabei 10 Liter Milch, mit denen er auf den Markt geht, um Brot einzutauschen. Seine Nutzenfunktion ist $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + 3 \ln x_2$, wobei x_1 und x_2 den Konsum an Milch und Brot bezeichnen. Auf dem Markt beträgt der Preis für einen Liter Milch 1 Taler, für einen Laib Brot 5 Taler. Wie viel Milch und wie viel Brot konsumiert der Viehzüchter täglich?

Aufgabe D.9.2.

Ein Haushalt mit der Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ gibt sein gesamtes Einkommen $m = 16$ für die beiden Güter mit den Preisen $p_1 = 1$ und $p_2 = 4$ aus. Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum!

Aufgabe D.9.3.

$$U(x_1, x_2) = \min \left(x_1, \frac{1}{2}x_2 \right)$$

$$m = 15, p_1 = 2 \text{ und } p_2 = 4$$

Haushaltsoptima!

Aufgabe D.9.4.

$$U(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$$

$$m = 8, p_1 = 2 \text{ und } p_2 = 4$$

Haushaltsoptima!

Aufgabe D.9.5.

$$U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$$

$$m, p_1 \text{ und } p_2 \text{ mit } \frac{m}{p_2} > 1$$

Haushaltsoptima!

Ausgabenfunktion!