UNIVERSITÄT LEIPZIG

Institut für Finanzen, Finanzwissenschaft

Prof. Dr. Thomas Lenk

Arbeitspapier Nr. 6 April 1999

Arrows Unmöglichkeitstheorem

Prof. Dr. Thomas Lenk
Dipl.-Kfm. Volkmar Teichmann

Institut für Finanzen
- Finanzwissenschaft -
Jahnallee 59
04109 Leipzig

Telefon: 0341 / 97 33 580
Fax: 0341 / 97 33 589
e-mail: iff_fiwi@wifa.uni-leipzig.de

ISSN 1437-5761

Das im Jahre 1951 von KENNETH J. ARROW entwickelte Theorem besagt, daß es unmöglich ist, aus offengelegten individuellen Präferenzen über soziale Zustände eine soziale Wohlfahrtsfunktion abzuleiten, wenn man bestimmte Bedingungen für kollektive Rationalität zugrunde legt. Im folgenden soll diese Feststellung ARROWS mit Hilfe eines Beispiels nachvollzogen werden.

ARROW geht von der Grundannahme aus, daß die von den Individuen geäußerten Präferenzen nicht kardinal meßbar sind und somit die individuellen Nutzen auch nicht interpersonell verglichen und aggregiert werden können. Die individuellen Präferenzordnungen lassen lediglich eine Aussage über die jeweilige Rangfolge bestimmter Alternativen zu. Darauf basierend ist nun die Frage zu beantworten, ob es trotzdem möglich ist, aus den individuellen Präferenzen der einzelnen Wirtschaftssubjekte eine konsistente soziale Präferenzordnung abzuleiten.
Hierzu wird folgendes Beispiel konstruiert:

- **2 Individuen** A und B stimmen über **3 soziale Alternativen** x, y und z ab, wobei die Alternativen von jedem Individuum in eine Reihenfolge zu bringen sind.
- Bei keinem Individuum besteht Indifferenz zwischen verschiedenen Alternativen.

Somit ergeben sich 36 mögliche Konstellationen individueller Präferenzen, sog. **Präferenzprofile**, die in einer Matrix abgetragen werden (siehe Tabelle 1).

		1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**	
		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1.	x	x	x	x	x	y	x	y	x	z	x	z
	2.	y	y	y	z	y	x	y	z	y	x	y	y
	3.	z	z	z	y	z	z	z	x	z	y	z	x
2	1.	x	x	x	x	x	y	x	y	x	z	x	z
	2.	z	y	z	z	z	x	z	z	z	x	z	y
	3.	y	z	y	y	y	z	y	x	y	y	y	x
3	1.	y	x	y	x	y	y	y	y	y	z	y	z
	2.	x	y	x	z	x	x	x	z	x	x	x	y
	3.	z	z	z	y	z	z	z	x	z	y	z	x
4	1.	y	x	y	x	y	y	y	y	y	z	y	z
	2.	z	y	z	z	z	x	z	z	z	x	z	y
	3.	x	z	x	y	x	z	x	x	x	y	x	x
5	1.	z	x	z	x	z	y	z	y	z	z	z	z
	2.	x	y	x	z	x	x	x	z	x	x	x	y
	3.	y	z	y	y	y	z	y	x	y	y	y	x
6	1.	z	x	z	x	z	y	z	y	z	z	z	z
	2.	y	y	y	z	y	x	y	z	y	x	y	y
	3.	x	z	x	y	x	z	x	x	x	y	x	x

***Tabelle 1:** Die 36 möglichen Präferenzprofile der Individuen A und B*

Folgende Schreibweisen werden bezüglich der aus den Präferenzprofilen abzuleitenden sozialen Präferenzordnung verwendet:

- **x>y**: Die Alternative x wird der Alternative y vorgezogen (soziale Präferenz)
- **x=y**: Die Alternativen x und y werden als gleichwertig angesehen (soziale Indifferenz).

Das Wahlverfahren, mit dessen Hilfe die soziale Präferenzordnung zu ermitteln ist, soll sowohl den bekannten Rationalitäts- bzw. Konsistenzanforderungen als auch bestimmten Ansprüchen an die demokratische Qualität von Abstimmungsverfahren genügen. Somit ergibt sich folgender Kriterienkatalog:

1. Alle Alternativen sind zu erfassen (Kriterium der **Vollständigkeit**).
2. Die **Transitivitätsbedingung** muß erfüllt werden (d.h., für jedes Tripel von Alternativen x, y und z folgt aus x>y und y>z auch x>z).
3. Wenn alle Individuen Alternative x gegenüber y präferieren, muß auch für die soziale Präferenzordnung x>y gelten, d.h., das **Pareto-Kriterium** ist einzuhalten.
4. Die soziale Rangordnung muß **unabhängig von irrelevanten Alternativen** sein; d.h., die gesellschaftliche Entscheidung für x oder y darf nicht abhängig von möglicherweise weiteren zur Verfügung stehenden Alternativen (z.B. Alternative z) und deren Bewertung sein.
5. Die individuellen Präferenzordnungen dürfen keinen Restriktionen unterliegen, d.h., die **universelle Anwendbarkeit** für eine beliebige Zahl von Individuen mit jeweils beliebigen (auch mehrgipfligen) Einzelpräferenzordnungen, muß gewährleistet sein.
6. Die gesellschaftliche Entscheidung darf nicht lediglich von den Präferenzen eines einzelnen Individuums abhängen, es wird also **keine Diktatur** eines Individuums zugelassen.

Diese Bedingungen sollen nun in unserem Beispiel zur Anwendung kommen. Zunächst werden unter Zuhilfenahme das Pareto-Kriteriums all jene Informationen aus Tabelle 1 herangezogen, die für die kollektive Präferenzordnung von Bedeutung sind. So stellen im Feld (1;2) beide Individuen Alternative x besser als y und x besser als z, so daß für die soziale Präferenzordnung gilt: x>y und x>z. Nach diesem Prinzip ergibt sich Tabelle 2-1.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	x > y	x > y			x > y	

1	x > z y > z	x > z	x > z y > z	y > z		
2	x > y x > z	x > y x > z z > y	x > z		x > y z > y	z > y
3	x > z y > z	x > z	y > x x > z y > z	y > x y > z		y > x
4	y > z		y > x y > z	y > x z > x y > z	z > x	y > x z > x
5	x > y	x > y z > y		z > x	x > y z > x z > y	z > x z > y
6		z > y	y > x	y > x z > x	z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-1: *Anwendung des Pareto-Kriteriums auf Tabelle 1*

Im nächsten Schritt soll das Unabhängigkeitskriterium auf Tabelle 1 angewendet werden. Wenn also bspw. eine soziale Rangordnung bezüglich x und y aufgestellt werden soll, spielt die Bewertung von z dabei keine Rolle. Die Felder, in denen A und B in ihrer Reihung von x und y übereinstimmen, sind bereits in Tabelle 2-1 mit x>y bzw. y>x gekennzeichnet. Wenn nun Individuum A x>y und Individuum B y>x einstuft, so führt das in all jenen Zellen, wo dies der Fall ist, zu einer **gleichen Relation** bzgl. der Alternativen x und y (also $x_A > y_A$ und $y_B > x_B$) wegen der Irrelevanz von z. Entsprechendes gilt für alle anderen Alternativenpaare. Somit ergeben sich unter Vernachlässigung all jener Bewertungspaare, auf die in Tabelle 2-1 bereits das Pareto-Kriterium angewendet werden konnte, genau sechs unterschiedliche Kategorien für jeweils 9 Felder. Diese Kategorien werden in Tabelle 3 dargestellt und mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet.

	1	2	3	4	5	6
1		ε	α	α γ	γ ε	α γ ε
2	ζ		α ζ	α γ ζ	γ	α γ
3	β	β ε		γ	β γ ε	γ ε
4	β δ	β δ ε	δ		β ε	ε
5	δ ζ	δ	α δ ζ	α ζ		α
6	β δ ζ	β δ	δ ζ	ζ	β	

Tabelle 3: *Übertragung des Unabhängigkeitskriteriums auf Tabelle 1*

Folgende Konstellationen sind dabei zu unterscheiden: α = $x_A>y_A$ und $y_B>x_B$; β = $y_A>x_A$ und $x_B>y_B$; γ = $x_A>z_A$ und $z_B>x_B$; δ = $z_A>x_A$ und $x_B>z_B$; ε = $y_A>z_A$ und $z_B>y_B$ sowie ζ = $z_A>y_A$ und $y_B>z_B$.

Vergleichen wir nun die Tabellen 1 und 2-1 und betrachten das Feld (1;2). Dieses Feld ist dadurch gekennzeichnet, daß durch Anwendung des Pareto-Kriteriums **zwei** Informationen für die spätere Ableitung einer sozialen Präferenzordnung zur Verfügung stehen. (Man könnte diese Betrachtung ebenso bei den anderen Feldern aus Tabelle 2-1 beginnen, in denen ebenfalls zwei Informationen vorliegen; also bei den Feldern (1;3), (2;1), (2;5), (3;1), (3;4), (4;3), (4;6), (5;2), (5;6), (6;4) oder (6;5).) Im Feld (1;2) stellen beide Individuen x besser als y und x besser als z; es gilt also x>y und x>z. Nur bezüglich der Reihung von y und z besteht keine Einigkeit. Möglich wären für dieses Feld demnach **drei** verschiedene **soziale Präferenzordnungen:**

Fall (1) x>y, x>z und **z>y** oder
Fall (2) x>y, x>z und **y>z** oder
Fall (3) x>y, x>z und **y=z**.

Wir wollen zunächst die soziale Präferenzordnung aus Fall (1) unterstellen. Damit wird Individuum **B** zum **Teildiktator** bezüglich der y-z-Beziehung, denn nur er zieht im entsprechenden Feld der Tabelle 1 die Alternative z der Alternative y vor. (Hätten wir unsere Betrachtung bspw. im Feld (1;3) gestartet, müßte nun entsprechend eine Teildiktatur bzgl. der x-y-Relation eingeführt werden usw.)

Wenn z>y für das Feld (1;2) gilt, so muß diese soziale Präferenz aufgrund des Unabhängigkeitskriteriums auch für alle anderen Felder gelten, in denen Individuum B die Alternative z gegenüber y und Individuum A die Alternative y gegenüber z bevorzugt. Dies sind all jene Felder, die in Tabelle 3 mit ε bezeichnet wurden. Aus dieser Überlegung ergibt sich Tabelle 2-2.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	x > y x > z y > z	x > y x > z **z > y**	x > z y > z	y > z	x > y **z > y**	**z > y**
2	x > y x > z	x > y x > z z > y	x > z		x > y z > y	z > y
3	x > z y > z	x > z **z > y**	y > x x > z y > z	y > x y > z	**z > y**	y > x **z > y**
4	y > z	**z > y**	y > x y > z	y > x z > x y > z	z > x **z > y**	y > x z > x **z > y**
5	x > y	x > y z > y		z > x	x > y z > x z > y	z > x z > y
6		z > y	y > x	y > x z > x	z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-2: *Anwendung der Teildiktatur von Individuum B auf Tabelle 2-1*

Um weitere Erkenntnisse für die soziale Präferenzordnung zu erhalten, werden nun all jene Felder aus Tabelle 2-2 in Betracht gezogen, die anfangs lediglich eine Information bzgl. einer kollektiven Präferenzordnung enthielten, und in denen durch die Anwendung der Teildiktatur von B bezüglich der y-z-Relation eine weitere Information hinzugekommen ist. Die notwendige dritte Information soll durch Anwendung der **Transitivitätsbedingung** gewonnen werden.

Somit ist zu entscheiden über die Felder (1;5), (3;2), (3;6) und (4;5). Auf die Felder (1;5) und (4;5) läßt sich die Transitivitätsbedingung nicht anwenden; es bleiben also nur zwei Felder zur Auswahl: die Felder (3;2) und (3;6). Hierbei spielt es keine Rolle, für welches der beiden Felder wir uns entscheiden.

Beginnen wir bspw. mit Feld (3;2) und wenden die Transitivitätsbedingung an, so erhalten wir x>y. Diese über die Transitivitätsbedingung hergeleitete Relation bzgl. x und y ist damit auch für all jene Felder gültig, in denen eine analoge x-y-Bewertung durch die Individuen A und B vorliegt wie im erwähnten Feld, also für alle in Tabelle 3 mit β gekennzeichneten Zellen. Aus der Anwendung dieser Erkenntnis ergibt sich Tabelle 2-3.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	x > z y > z	y > z	x > y z > y	z > y
2	x > y x > z	x > y x > z z > y	x > z		x > y z > y	z > y
3	**x > y** x > z y > z	**x > y** x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x y > z	**x > y** z > y	y > x z > y
4	**x > y** y > z	**x > y** z > y	y > x y > z	y > x z > x y > z	**x > y** z > x z > y	y > x z > x z > y
5	x > y	x > y z > y		z > x	x > y z > x z > y	z > x z > y
6	**x > y**	**x > y** z > y	y > x	y > x z > x	**x > y** z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-3: *Anwendung der Transitivitätsbedingung auf Tabelle 2-2*

Analog zum vorherigen Vorgehen werden alle Felder, die jetzt zwei Informationen enthalten, daraufhin untersucht, ob die Transitivitätsbedingung anwendbar ist. Dies ist nur im Feld (4;1) der Fall. Wir erhalten x>z mit Gültigkeit für alle mit δ gekennzeichneten Felder. Diese Erkenntnis wird in Tabelle 2-4 festgehalten.

	1	2	3	4	5	6
1	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	x > z y > z	y > z	x > y z > y	z > y
2	x > y x > z	x > y x > z z > y	x > z		x > y z > y	z > y
3	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x y > z	x > y z > y	y > x z > y
4	x > y **x > z** y > z	x > y **x > z** z > y	y > x **x > z** y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y
5	x > y **x > z**	x > y **x > z** z > y	**x > z**	z > x	x > y z > x z > y	z > x z > y
6	x > y **x > z**	x > y **x > z** z > y	y > x **x > z**	y > x z > x	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-4: *Anwendung der Transitivitätsbedingung auf Tabelle 2-3*

In Tabelle 2-4 existieren 3 Felder, in denen jeweils mit x>z eine zweite Information hinzugekommen ist: Dies sind die Felder (5;1), (6;1) und (6;3). Die Transitivitätsbedingung läßt sich nur auf das letztgenannte Feld anwenden: Als Ergebnis erhalten wir y>z mit Gültigkeit für alle in Tabelle 3 mit ζ markierten Zellen (siehe Tabelle 2-5).

	1	2	3	4	5	6
1	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	x > z y > z	y > z	x > y z > y	z > y
2	x > y x > z **y > z**	x > y x > z z > y	x > z **y > z**	**y > z**	x > y z > y	z > y
3	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x y > z	x > y z > y	y > x z > y
4	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y
5	x > y x > z **y > z**	x > y x > z z > y	x > z **y > z**	z > x **y > z**	x > y z > x z > y	z > x z > y
6	x > y x > z **y > z**	x > y x > z z > y	y > x x > z **y > z**	y > x z > x **y > z**	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-5: *Anwendung der Transitivitätsbedingung auf Tabelle 2-4*

Zur Tabelle 2-6 kommen wir durch analoges Vorgehen: Von den in Frage kommenden Feldern (2;3), (5;3) und (5;4) läßt sich die Transitivitätsbedingung nur auf das letztere anwenden, und wir erhalten für alle α-Felder y>x.

	1	2	3	4	5	6
1	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	**y > x** x > z y > z	**y > x** y > z	x > y z > y	**y > x** z > y
2	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	**y > x** x > z y > z	**y > x** y > z	x > y z > y	**y > x** z > y
3	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x y > z	x > y z > y	y > x z > y
4	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y
5	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	**y > x** x > z y > z	**y > x** z > x y > z	x > y z > x z > y	**y > x** z > x z > y
6	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-6: *Anwendung der Transitivitätsbedingung auf Tabelle 2-5*

Zur Entscheidung liegen in Tabelle 2-6 vier Felder vor: Auf die Felder (1;4) und (2;4) läßt sich keine Transitivitätsbedingung anwenden. Dagegen gilt für die Felder (1;6) und (2;6) sowie für alle weiteren mit γ gekennzeichneten Felder z>x. Dies führt uns zu Tabelle 2-7.

	1	2	3	4	5	6
1	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x **z > x** y > z	x > y **z > x** z > y	y > x **z > x** z > y
2	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x **z > x** y > z	x > y **z > x** z > y	y > x **z > x** z > y
3	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x **z > x** y > z	x > y **z > x** z > y	y > x **z > x** z > y
4	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y
5	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y
6	x > y x > z y > z	x > y x > z z > y	y > x x > z y > z	y > x z > x y > z	x > y z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 2-7: *Anwendung der Transitivitätsbedingung auf Tabelle 2-6*

Aus den in Tabelle 2-7 enthaltenen Informationen läßt sich nun für jedes der 36 Felder eine soziale Präferenzordnung bilden, was in Tabelle 4 geschieht.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x
2	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x
3	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x
4	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x
5	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x
6	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x

Tabelle 4: *Ableitung der kompletten sozialen Präferenzordnung aus Tab. 2-7*

Vergleichen wir nun Tabelle 4 mit unseren Ausgangspräferenzordnungen der beiden Individuen (Tabelle 1), so zeigt sich, daß sich Individuum B in jedem der 36 Felder mit seinem persönlichen Präferenzprofil durchgesetzt hat; d.h., B ist zum **Diktator** geworden. Damit liegt ein **Verstoß gegen Kriterium 6** vor.

Bei analogem Vorgehen wie im Fall (1) läßt sich nachweisen, daß sich im Fall (2) - Ernennung von A zum Teildiktator bezüglich der y-z-Beziehung - Individuum A mit seinem Präferenzprofil für alle 36 Felder durchsetzt und damit seinerseits zum Diktator wird. Es läge also wiederum ein Verstoß gegen die sechste Bedingung vor.

Nun ist noch Fall (3) zu untersuchen, in dem für die soziale Präferenzordnung des Feldes (1;2) Indifferenz zwischen den Alternativen y und z unterstellt wird. Wir fügen also für dieses Feld in Tabelle 2-1 die Beziehung y=z ein, die natürlich aufgrund analoger y-z-Relationen für alle ε-Felder Gültigkeit hat.

	1	2	3	4	5	6
1	x > y x > z y > z	x > y x > z **y = z**	x > z y > z	y > z	x > y **y = z**	**y = z**
2	x > y x > z	x > y x > z z > y	x > z		x > y z > y	z > y
3	x > z y > z	x > z **y = z**	y > x x > z y > z	y > x y > z	**y = z**	y > x **y = z**
4	y > z	**y = z**	y > x y > z	y > x z > x y > z	z > x **y = z**	y > x z > x **y = z**
5	x > y	x > y z > y		z > x	x > y z > x z > y	z > x z > y
6		z > y	y > x	y > x z > x	z > x z > y	y > x z > x z > y

Tabelle 5: *Anwendung von Fall (3) auf Tabelle 2-1*

Im folgenden sollen die beiden dick eingerahmten Felder aus Tabelle 5 betrachtet werden. Bei Anwendung der Transitivitätsbedingung gilt für das Feld (4;5) wegen z>x und y=z auch y>x. Aufgrund der Unabhängigkeitsbedingung gilt dies auch für alle anderen β-Felder, also auch für das Feld (3;2). Bei Anwendung der Transitivitätsbedingung für ebendieses Feld ergibt sich aus y=z und y>x die Beziehung z>x. Genau dies verstößt aber gegen das Pareto-Kriterium, da in diesem Feld **beide** Individuen die Alternative x gegenüber z bevorzugen und für die soziale Präferenzordnung folglich x>z gelten muß. Die Annahme von Fall (3) führt also zu einem **Verstoß gegen** die **Pareto-Bedingung**.

Ein analoger Widerspruch besteht zwischen den Feldern (1;5) und (3;6) bezüglich der x-z-Relation: Für das Feld (1;5) ergibt die Transitivitätsbedingung x>z, was aufgrund des Unabhängigkeitskriteriums dann auch für das Feld (3;6) gelten müßte. In letzterem aber würde sich aufgrund der Transitivitätsbedingung dann auch x>y ergeben, was den Präferenzprofilen der Individuen A und B widerspricht.

Nun ist ja die Existenz anderer individueller Präferenzprofile denkbar, aus denen eine soziale Präferenzordnung ohne Verstoß gegen das Pareto-, Unabhängigkeits- oder Nichtdiktaturkriterium ableitbar wäre. Allerdings wurde eingangs die **universelle Anwendbarkeit** als weitere Anforderung an die Mehrheitswahlregel gestellt. D.h., die kollektive Präferenzordnung muß sich aus **jeder** denkbaren (also auch der von uns unterstellten) Einzelpräferenzordnung ableiten lassen.

Daß dies nicht möglich ist, ohne dabei nicht gegen mindestens eine der übrigen Anforderungen zu verstoßen, somit also das Unmöglichkeitstheorem von ARROW Gültigkeit besitzt, wurde in diesem Aufsatz mit relativ einfachen Mitteln dargestellt.

Literaturempfehlungen:

Arrow, Kenneth J.: Individual Choice under Certainty and Uncertainty, Cambridge 1984.

Arrow, Kenneth J.: Social Choice and Individual Values, 2nd edition, New York 1963.

Feldman, Allan M.: Welfare Economics and Social Choice Theory, Boston u.a. 1994, S. 178-195.

Frey, Bruno S./Kirchgässner, Gebhard: Demokratische Wirtschaftspolitik: Theorie und Anwendung, 2., völlig neubearb. Aufl., München 1994, S. 143-171.